

*Ecole thématique*

*Méthodes Asymptotiques en Mécanique*

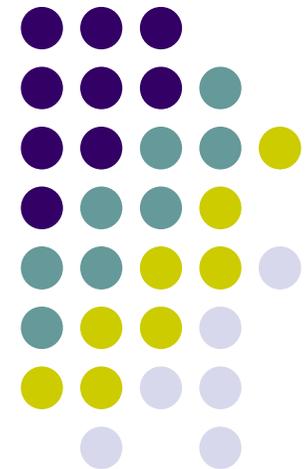
*Quiberon 16-22 septembre 2012*

---

**Méthodes asymptotiques pour les  
structures minces**

Olivier MILLET

Collaborations : A. Cimetière, A. Hamdouni,  
E. Sanchez-Palencia, F. Béchet



# Plan du cours



## I Rappels de MMC

- Principe des Puissances Virtuelles
- Equations d'équilibre de la MMC en Eulérien
- Transport en Lagrangien, équations d'équilibre de l'élasticité non-linéaire
- Linéarisation – équations de l'élasticité linéaire classique

## II Equations des plaques de Kirchhoff-Love

- Hypothèses cinématiques de Kirchhoff et Love
- Loi de comportement en contraintes planes, contradiction avec les hypothèses cinématiques
- Equations d'équilibre 2D de KL à partir des équations de l'élasticité 3D linéaire

## III Rappel de géométrie différentielle des surfaces

- Paramétrisation d'une surface (vecteurs tangents et normal, 1ère forme fondamentale ...)
- Dérivation d'un champ de vecteurs tangents (symboles de Christoffel, 2ème forme fondamentale, opérateur de courbure, dérivée covariante ...)
- Dérivation d'un champ de vecteur quelconque à support sur une surface
- Gradient d'un champ de vecteurs défini en tout point de la coque - Application à la théorie des coques

# Plan du cours (suite)



## IV Les modèles classiques de coques minces élastiques

- Hypothèses cinématiques et statiques
- Etablissement des équations d'équilibre 2D de Novozhilov-Donnell et de membrane

## V Les méthodes asymptotiques en théorie des structures minces

- Bibliographie sur l'utilisation des méthodes asymptotiques en théorie des structures minces : plaques, coques, poutres et poutres voiles
- Classification des modèles asymptotiques de plaques et de coques minces en fonction de leur domaine de validité, en partant de l'élasticité 3D non linéaire
- Généralisation de l'approche aux poutres voiles : obtention de quelques modèles originaux

## VI Singularités en théorie des coques minces

- Singularités et couches limites en théorie des coques
- Quelques notions sur les maillages adaptatifs et anisotropes
- Etude des singularités par des techniques de maillage adaptatifs
- Problèmes sensitifs pour les coques elliptiques

➔ **Support de cours et articles associés en ligne sur le site web de l'école**



# I Rappels de Mécanique des Milieux Continus

- Principe des Puissances Virtuelles
- Equations d'équilibre des milieux continus en Eulérien
- Transport en Lagrangien, équations d'équilibre de l'élasticité non-linéaire
- Linéarisation – équations de l'élasticité linéaire classique

# Le Principe des Puissances Virtuelles (PPV)



1) Les puissances virtuelles des efforts s'exerçant sur le milieu continu sont des formes linéaires continues sur  $\mathcal{V}$

$$2) \text{ On a } \mathcal{P}_a(v^*) = \mathcal{P}_i(v^*) + \mathcal{P}_e(v^*) \quad \forall v^* \in \mathcal{V}, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

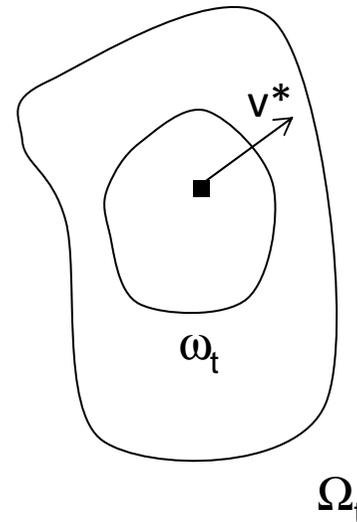
Puissance virtuelle des quantités d'accélération

Puissance virtuelle des efforts intérieurs

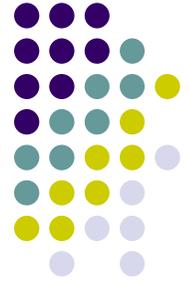
Puissance virtuelle des efforts extérieurs

3) Pour tout mouvement virtuel rigidifiant

$$\mathcal{P}_i(v^*) = 0, \quad \forall v^* \in \mathcal{V}_r$$



# Représentation des puissances virtuelles

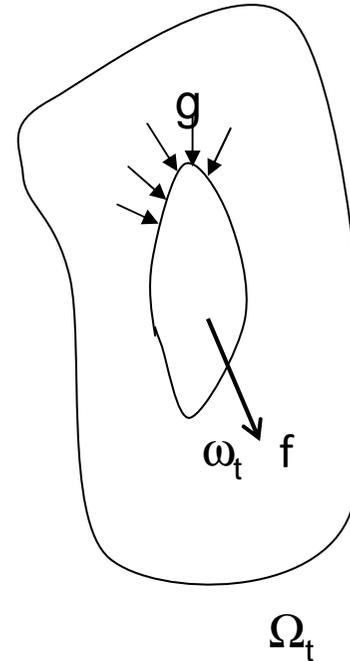


$$\mathcal{P}_a(v^*) = \int_{\omega_t} \rho \gamma \cdot v^* dx$$

$$\mathcal{P}_e(v^*) = \int_{\omega_t} f \cdot v^* dx + \int_{\partial\omega_t} g \cdot v^* dS$$

$$\mathcal{P}_i(v^*) = 0, \quad \forall v^* \in \mathcal{V}_r$$

$$v^* \in \mathcal{V}_r \iff D(v^*) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^*}{\partial x} + \overline{\frac{\partial v^*}{\partial x}} \right) = 0$$



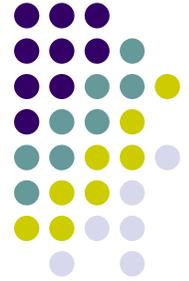
Cinématique de solide rigide

$$v(x) = v(y) + \Omega \wedge (x - y)$$



$$\mathcal{P}_i(v^*) = \int_{\omega_t} Tr(AD(v^*)) dx$$

Tenseur symétrique d'ordre 2



Puissance des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_i(v^*) = \int_{\omega_t} Tr(AD(v^*))dx$

On pose  $A = -\sigma$

Convention de signe de  
Mécanique des solides

Tenseur des contraintes  
de Cauchy



$$\mathcal{P}_i(v^*) = - \int_{\omega_t} Tr(\sigma D(v^*))dx = - \int_{\omega_t} Tr(\sigma \frac{\partial v^*}{\partial x})dx$$

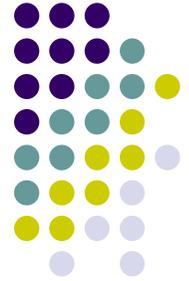
On transforme l'expression de  $\mathcal{P}_i(v^*)$

$$div(\sigma.v^*) = div\sigma.v^* + Tr(\sigma \frac{\partial v^*}{\partial x})$$



$$\mathcal{P}_i(v^*) = \int_{\omega_t} div\sigma.v^* dx - \int_{\partial\omega_t} (\sigma.n)v^* dS$$

# Equations d'équilibre des milieux continus



$$\mathcal{P}_a(v^*) = \mathcal{P}_i(v^*) + \mathcal{P}_e(v^*) \quad \forall v^* \in \mathcal{V}, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$



$$\int_{\omega_t} (\rho\gamma - f - \operatorname{div}\sigma) v^* dx + \int_{\partial\omega_t} (\sigma.n - g) \cdot v^* dS = 0 \quad (\text{E}_1)$$

En choisissant  $v^*$  nul sur  $\partial\omega_t$

$$\Rightarrow \int_{\omega_t} (\rho\gamma - f - \operatorname{div}\sigma) v^* dx = 0, \quad \forall v^* \in \mathcal{V}, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$



$$\operatorname{div}\sigma + f = \rho\gamma \quad \text{dans } \omega_t, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

En revenant à (E<sub>1</sub>)

$$\Rightarrow \int_{\partial\omega_t} (\sigma.n - g) \cdot v^* dS = 0, \quad \forall v^* \in \mathcal{V}$$



$$\sigma.n = g \quad \text{sur } \partial\omega_t, \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

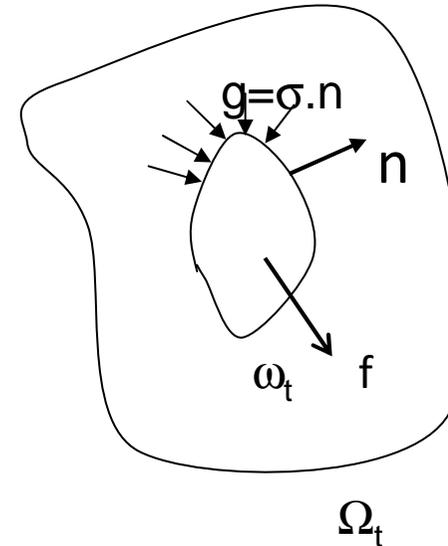
# Equations d'équilibre des milieux continus



$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = \rho \gamma & \text{dans } \Omega_t \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \partial \Omega_t \end{cases}$$

Représente les efforts intérieurs s'exerçant au sein du MC

Vecteur contrainte



## Bilan des équations

3 équations + conservation de la masse  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$



4 équations pour 10 inconnues (1 pour  $\rho$ , 3 pour  $v$ , 6 pour  $\sigma$ )

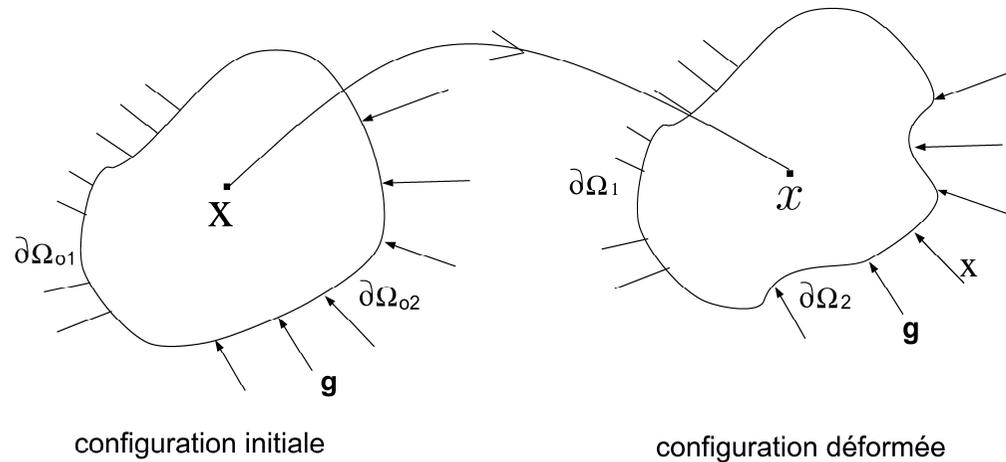


Loi de comportement reliant  $\sigma$  à  $D(v)$



Pour un solide élastique, loi de comportement donnée en représentation Lagrangienne

# Equations d'équilibre lagrangiennes non linéaires



$$\begin{array}{l}
 u(X) : \Omega_0 \mapsto \Omega \\
 X \mapsto x = X + u(X)
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 F = \frac{\partial x}{\partial X} = I + \frac{\partial u}{\partial X}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Div \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \\
 u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \\
 \sigma \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega_2
 \end{array} \right.
 \quad \xrightarrow{\text{Transport des équations}} \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 Div(\Sigma \bar{F}) + f = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\
 u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{01} \\
 (F \Sigma) \cdot n = g \quad \text{sur } \partial\Omega_{02}
 \end{array} \right.$$



- Second tenseur de Piola-Kirchhoff (Lagrangien)

$$\Sigma = \det F \overline{F^{-1} \sigma \overline{F}^{-1}}$$

- Loi de comportement élastique non linéaire (Saint-Venant Kirchhoff)

$$\Sigma = \lambda (\text{Tr} E) I + 2\mu E$$

- Tenseur des déformations non linéaires de Green-Lagrange

$$E = \frac{1}{2}(\overline{F} F - I) = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{\partial u}}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial u}}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial X}$$



Valable pour

- des déplacements modérés ou grands
- une géométrie non linéaire

# Les équations d'équilibre en H.P.P.



Linéarisation pour de petits déplacements :  $\|u(X)\| \ll 1$  et  $\|\text{Grad}u\| \ll 1$

$$\longrightarrow \begin{cases} \text{Div}\sigma + f & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \sigma \cdot n & = g & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Loi de comportement de Hooke linéaire élastique  $\sigma = \lambda (\text{Tr}\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$

où  $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  : tenseur linéarisé des déformations

Les configurations initiales et finales sont maintenant confondues.  
On ne distingue plus  $x$  et  $X$  que l'on note  $x$

En termes de déplacements : **équation de Navier-Lamé**

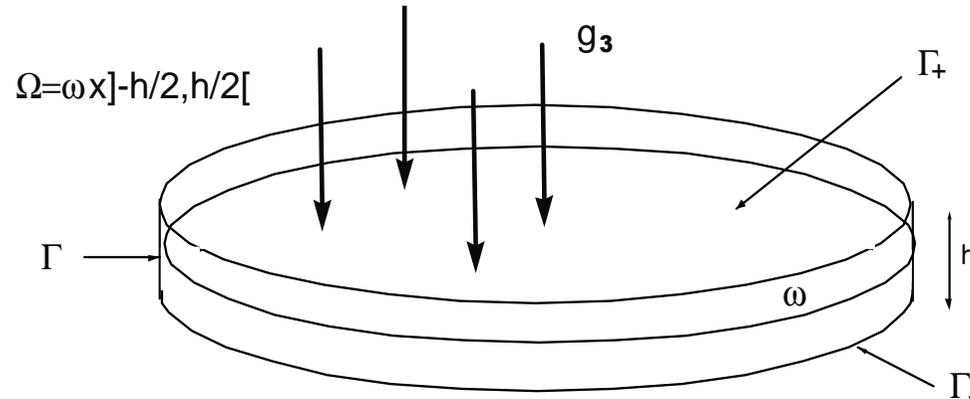
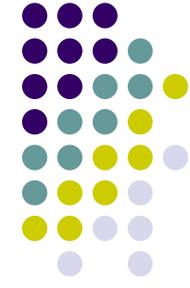
$$(\lambda + \mu)\text{Grad}(\text{Div}u) + \mu\Delta u + \rho g = 0$$



## II Modèles de plaques minces élastiques

- Le modèle linéaire de plaques de Kirchhoff-Love
- Le modèle non linéaire de plaques de Von Karman
- Cas particulier des poutres en flexion sans efforts tranchant

# Modèle de plaques de Kirchhoff-Love

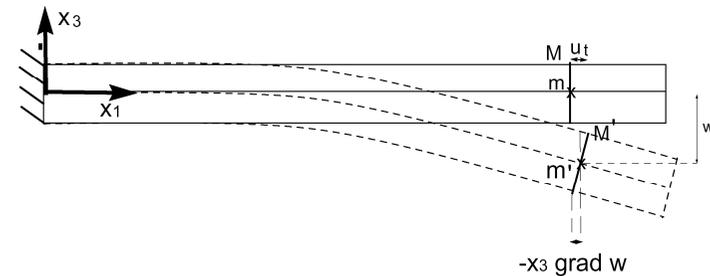


- Déformée de la surface moyenne

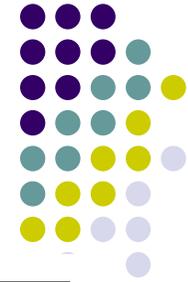
$$u(m, 0) = mm' = u_t(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)e_3$$

- Hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love

$$\begin{aligned} u(M) = MM' = u(m, x_3) &= u(m, 0) - x_3 \text{grad} w \\ &= u_t(x_1, x_2) - x_3 \text{grad} w + w(x_1, x_2)e_3 \end{aligned}$$



- Conséquences
- pas de cisaillement transverse
  - pas de variation d'épaisseur



- Tenseur linéarisé des déformations  $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(Gradu + \overline{Gradu}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial M} + \overline{\frac{\partial u}{\partial M}}\right)$

Décomposition du gradient

$$U = U_t + we_3 \quad \longrightarrow \quad GradU = \begin{pmatrix} gradU_t & \frac{\partial U_t}{\partial x_3} \\ \overline{gradw} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} \quad \varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_s \\ \overline{\varepsilon_s} & \varepsilon_n \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

- Hypothèse cinématique de K. Love

$$u(M) = \underline{u_t(x_1, x_2) - x_3 gradw} + w(x_1, x_2)e_3 \quad \text{avec} \quad U_t = u_t(x_1, x_2) - x_3 gradw$$



$$\varepsilon_t = e_t(u_t) + x_3 \rho_t(w) \quad \text{avec} \quad e_t = \frac{1}{2}(gradu_t + \overline{gradu_t})$$

$$\varepsilon_s = 0.$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0$$

$$\rho_t = -grad(gradw) = - \begin{pmatrix} w_{,11} & w_{,12} \\ w_{,12} & w_{,22} \end{pmatrix}$$



- Hypothèse de contraintes planes

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \sigma_s & \sigma_n \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)} + \text{pas d'effort sur les faces supérieure et inférieure}$$



$$\sigma_s = \sigma_n = 0.$$

- Loi de Hooke  $\sigma = \lambda Tr(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$

contraintes planes  $\sigma_n = 0 \Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} Tr(\varepsilon_t)$

Hypothèse de contraintes plane en contradiction avec l'hypothèse cinématique  $\varepsilon_n = 0$

- Loi de comportement en contraintes planes

$$\sigma_t = \lambda Tr(\varepsilon)I_2 + 2\mu\varepsilon_t = \lambda Tr(\varepsilon_t)I_2 + 2\mu\varepsilon_t + \lambda\varepsilon_n I_2$$

$$= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} Tr(\varepsilon_t) + 2\mu\varepsilon_t$$

$$\longleftrightarrow \sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \nu Tr(\varepsilon_t)I_2 + (1 - \nu)\varepsilon_t \right)$$

# Loi de comportement en contraintes planes



$$\sigma_t = \frac{1}{2}n_t + \frac{3}{2}x_3m_t$$

avec

$$n_t = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}Tr(e_t)I_2 + 4\mu e_t$$
$$= \frac{2E}{1 - \nu^2} \left( \nu Tr(e_t)I_2 + (1 - \nu)e_t \right)$$

Tenseur des contraintes  
membranaires

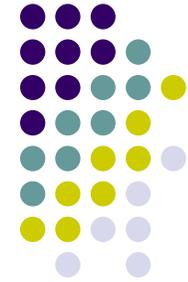
$$m_t = \frac{4\lambda\mu}{3(\lambda + 2\mu)}Tr(\rho_t)I_2 + \frac{4}{3}\mu\rho_t$$
$$= \frac{2E}{3(1 - \nu^2)} \left( \nu Tr(\rho_t)I_2 + (1 - \nu)\rho_t \right)$$

Tenseur des moments  
de flexion

Attention aux coefficients de la loi de comportement

- Equations d'équilibre tridimensionnelles

$$\left\{ \begin{array}{l} Div \sigma = -f \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = g^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{array} \right.$$



- Décomposition suivant la surface moyenne et la normale

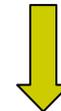
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \sigma_s & \sigma_n \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

Equations dans le plan tangent

$$\left\{ \begin{array}{l} div \sigma_t + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \omega \\ \sigma_s = 0 \quad \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{array} \right.$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} div \sigma_t dx_3 + [\sigma_s]_{-h/2}^{h/2} = 0$$

Intégration sur l'épaisseur + CL

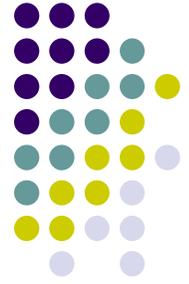


Equation suivant la normale

$$\left\{ \begin{array}{l} div \sigma_s + \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_3} = -f_3 \quad \text{dans } \omega \\ \sigma_n = \pm g_3^\pm \quad \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{array} \right.$$

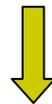
Equation de membrane

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{2} div(n_t) = 0 \quad \text{dans } \omega \\ u_t = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$



## □ Equation dans le plan tangent

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_t + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3} = 0 & \text{dans } \omega \\ \sigma_s = 0 & \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{cases}$$



Multiplication par  $x_3$  + divergence + intégration sur l'épaisseur

$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \operatorname{div}(\operatorname{div} n_t) dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2} x_3^2 \operatorname{div}(\operatorname{div} m_t) dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3}\right) dx_3 = 0$$

## □ Equation suivant la normale

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_s + \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_3} = -f_3 & \text{dans } \omega \\ \sigma_n = \pm g_3^\pm & \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{cases}$$



$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3}\right) dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\operatorname{div} \sigma_s) dx_3$$

$$= \left[ x_3 \operatorname{div} \sigma_s \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \operatorname{div} \sigma_s dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + \left[ \sigma_n \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + (g_3^+ + g_3^-)$$

## Equation de flexion des plaques de K.Love

$$\begin{cases} \frac{h^3}{8} \operatorname{div}(\operatorname{div} m_t) = -p_3 & \text{dans } \omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

$$p_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^-$$

Résultante des efforts sur l'épaisseur



## Propriétés de calcul tensoriel

- $\operatorname{div}(\alpha I_2) = \operatorname{grad}(\alpha)$
- $\operatorname{Tr}(\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \alpha)) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \alpha) = \Delta \alpha$  pour tout champ scalaire  $\alpha$
- $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$  pour tout champ de vecteurs  $u$ .
- $\Delta(\operatorname{grad} \alpha) = \operatorname{grad}(\Delta \alpha)$  pour tout champ scalaire  $\alpha$ .



$$\operatorname{div}(\operatorname{div} m_t) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w$$

# Equation de flexion des plaques de Kirchhoff-Love



$$\begin{cases} D \Delta^2 w = p_3 & \text{dans } \omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

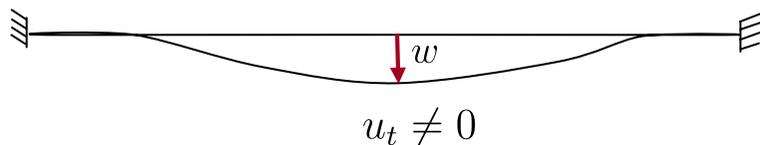
Rigidité à la flexion

□ Découplage des équations de membrane et de flexion dans le modèle de Kirchhoff-Love

Plaque chargée uniquement en flexion  $\left| \begin{array}{l} f_t = g_t = 0 \\ p_3 \neq 0 \end{array} \right.$

Equation de membrane

$$\begin{cases} \frac{h}{2} \operatorname{div}(n_t) = 0 & \text{dans } \omega \\ u_t = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{u_t = 0} \quad \text{et} \quad w \neq 0$$



Contradiction apparente !!

# Equation de flexion des plaques de Kirchhoff-Love

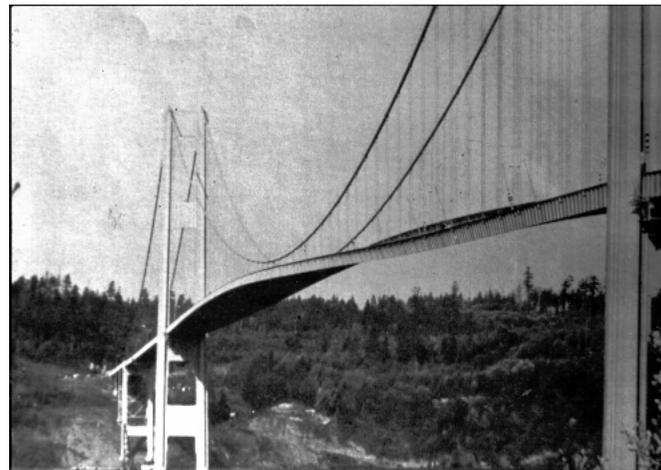


$$\begin{cases} D \Delta^2 w = p_3 & \text{dans } \omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

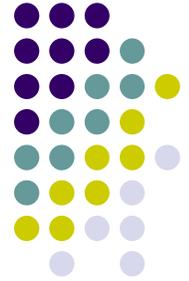
Rigidité à la flexion

- Equation valable en HPP : petites déflexions de l'ordre de 1/100<sup>ème</sup> épaisseur
- Si déflexion  $w$  importantes, il faut utiliser un modèle non linéaire



Pont de Tacoma  
USA, 1940

# Modèle non linéaire de Von Karman



- ❑ Valable pour des déplacements modérés : quelques fois l'épaisseur
- ❑ Couple la déflexion au déplacement tangentiel  $u_t$

$$\begin{cases} \frac{h}{2} \operatorname{div}(n_t) = 0 & \text{dans } \omega \\ D \Delta^2 w - h \operatorname{div}(n_t \operatorname{grad} w) = p_3 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

- Déformation non linéaire

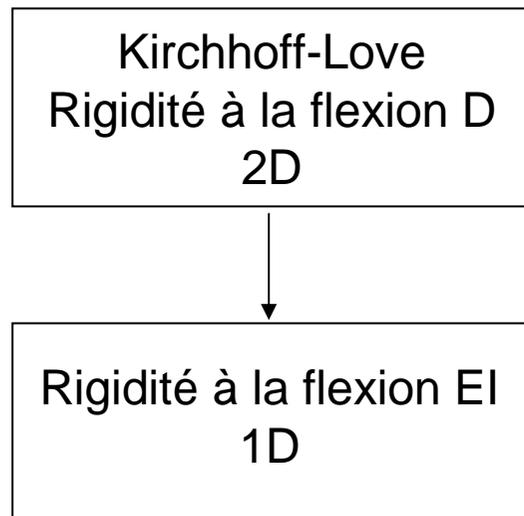
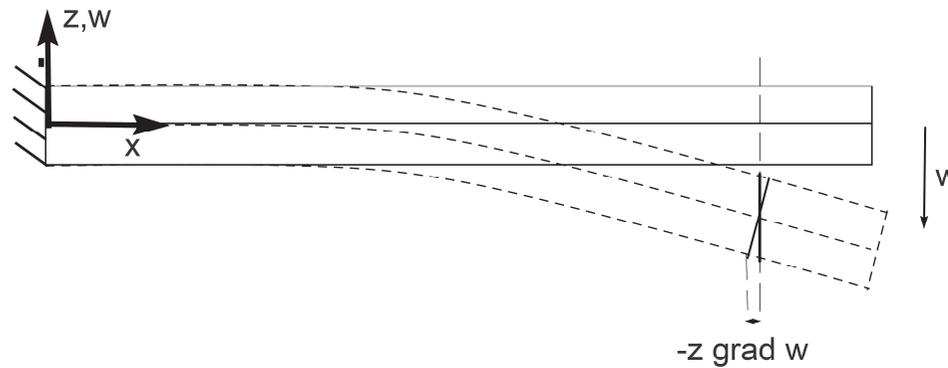
$$E_t = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} u_t + \overline{\operatorname{grad} u_t} + \operatorname{grad} w \overline{\operatorname{grad} w})$$

Couplage  
membrane/flexion

- Découplage dans le cas des plaques non linéaires précontraintes

$$D \Delta^2 w - h \operatorname{div}(N_0 \operatorname{grad} w) = p_3$$

# Cas particulier des poutres en flexion sans effort tranchant



$$D \Delta^2 w = p_3$$



$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p_3$$