

Ecole thématique Méthodes Asymptotiques en Mécanique - Quiberon 16-22 septembre 2012

**Méthodes asymptotiques pour les structures
minces**

Support de cours

Olivier MILLET

Table des matières

1	Rappels de Mécanique des Milieux Continus	5
1.1	Principe des puissances virtuelles	5
1.1.1	Enoncé du principe	5
1.1.2	Représentation des puissances virtuelles	6
1.2	Equations d'équilibre des milieux continus	8
1.2.1	Les équations d'équilibre eulériennes	8
1.2.2	Les équations d'équilibre lagrangiennes non linéaires	9
1.2.3	Les équations d'équilibre linéarisées en H.P.P.	11
2	Modèles de plaques minces élastiques	13
2.1	Le modèle linéaire de plaque de Kirchhoff-Love	13
2.1.1	Les équations tridimensionnelles	13
2.1.2	Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love	14
2.1.3	Hypothèse de contraintes planes	16
2.1.4	Equations d'équilibre bidimensionnelles	17
2.1.5	Cas particulier d'une plaque circulaire sous chargement uniforme . . .	20
2.2	Le modèle non linéaire de plaques de Von Karman	21
3	Formalisme intrinsèque de la théorie des surfaces	23
3.1	Surface paramétrée	23
3.1.1	Base naturelle de ω	24
3.1.2	Première forme fondamentale	25
3.2	Dérivée d'un champ de vecteurs à support sur une surface ω	25
3.2.1	Dérivée covariante d'un champ de vecteurs tangents	25
3.2.2	Seconde forme fondamentale	26
3.2.3	Opérateur de courbure	27
3.2.4	Dérivée d'un champ de vecteurs tangents	27
3.2.5	Dérivation d'un champ de vecteurs quelconque à support sur une surface	28
3.3	Opérateurs différentiels sur une surface ω	29
3.3.1	Dérivation covariante d'un champ d'endomorphismes du plan tangent	29
3.3.2	Rotationnel et divergence d'un champ de vecteurs tangents	29
3.3.3	Rotationnel et divergence d'un champ d'endomorphismes du plan tangent	30
3.4	Déplacements virtuels	31
3.5	Forme d'une surface matérielle	32
3.6	Déformation	34

3.6.1	Déformation tangentielle	34
3.6.2	Déformation des courbures	34
3.7	Connexion Riemannienne du changeur de configuration	35
3.8	Application à la théorie des coques minces	36
3.8.1	Relation entre la divergence 3D et la divergence 2D d'un champ de vecteurs	36
3.8.2	Relation entre la divergence 3D et la divergence 2D d'un champ d'endomorphismes	38
3.9	Approche surfacique de la théorie des membranes	40
3.9.1	Milieu continu conservatif à deux dimensions	40
3.9.2	Principe des puissances virtuelles	40
3.9.3	Equations d'équilibre de la théorie des membranes non compressées	42
4	Les modèles classiques de coques minces élastiques	45
4.1	Hypothèses de Kirchhoff-Love	45
4.1.1	Description tridimensionnelle	45
4.1.2	Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love	46
4.1.3	Hypothèse de contraintes planes	48
4.2	Le modèle de coques minces élastiques de Novozhilov-Donnell	50
4.2.1	Rappel des hypothèses statiques et cinématiques	50
4.2.2	Le problème tridimensionnel de départ	51
4.2.3	Equations d'équilibre bidimensionnelles de Novozhilov-Donnell	52
	Equation de membrane	52
	Equation de flexion	53
	Conditions aux limites associées	54
4.3	Le modèle de membrane	54
4.4	Les limitations des approches basées sur des hypothèses a priori	54

Chapitre 1

Rappels de Mécanique des Milieux Continus

1.1 Principe des puissances virtuelles

On rappelle ici l'énoncé du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) conduisant aux équations d'équilibre eulériennes de la Mécanique des Milieux Continus (MMC).

1.1.1 Enoncé du principe

Soit Ω_t un ouvert de \mathbb{R}^3 représentant le milieu continu dans sa configuration actuelle à l'instant t . On note ω_t un sous domaine de Ω_t et v^* un champ de vitesses virtuelles sur ω_t .

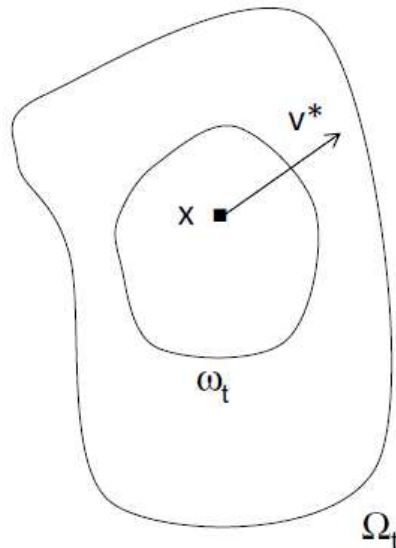


FIGURE 1.1 – Milieu continu considéré et champ de vitesses virtuelles associé

Définissons l'espace \mathcal{V} , espace vectoriel des vitesses virtuelles, que l'on suppose normé et considérons par la suite des champs de vitesses virtuelles $v^* \in \mathcal{V}$.

Le principe des puissances virtuelles s'énonce en 3 points :

1. Les puissances virtuelles des efforts s'exerçant sur le milieu continu sont des formes linéaires continues sur \mathcal{V} .
2. $\mathcal{P}_a(v^*) = \mathcal{P}_i(v^*) + \mathcal{P}_e(v^*)$, $\forall v^* \in \mathcal{V}$, $\forall \omega_t \subset \Omega_t$
où $\mathcal{P}_a(v^*)$, $\mathcal{P}_i(v^*)$, $\mathcal{P}_e(v^*)$ désignent respectivement la puissance virtuelle des quantités d'accélération, des efforts intérieurs et des efforts extérieurs au milieu continu ω_t .
3. $\mathcal{P}_i(v^*) = 0$, $\forall v^* \in \mathcal{V}_r$ où \mathcal{V}_r désigne l'espace des vitesses virtuelles de type solide rigide.
On a bien évidemment $\mathcal{V}_r \subset \mathcal{V}$.

1.1.2 Représentation des puissances virtuelles

On a

$$\mathcal{P}_a(v^*) = \int_{\omega_t} \rho \gamma \cdot v^* dx$$

où $\gamma = \gamma(x, t)$ désigne l'accélération eulérienne au point $x \in \omega_t$ et $\rho = \rho(x, t)$ la masse volumique du milieu continu. La puissance virtuelle des efforts extérieurs s'exprime quant à elle suivant :

$$\mathcal{P}_e(v^*) = \int_{\omega_t} f \cdot v^* dx + \int_{\partial\omega_t} g \cdot v^* dS$$

où le premier terme du second membre désigne la puissance des efforts volumiques f , et le second terme la puissance des efforts surfaciques g exercés sur $\partial\omega_t$.

Pour la puissance des efforts intérieurs, d'après le point 3), on sait que :

$$\mathcal{P}_i(v^*) = 0, \forall v^* \in \mathcal{V}_r$$

D'autre part, on a

$$v^* \in \mathcal{V}_r \iff D(v^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x} + \overline{\frac{\partial v^*}{\partial x}} \right) = 0$$

où $D(v^*)$ désigne le tenseur *taux de déformation* ou *vitesse de déformation*, et la barre l'opérateur de transposition. Ce résultat découle directement de la cinématique de type solide rigide :

$$v(x) = v(y) + \Omega \wedge (x - y)$$

Cela conduit à l'expression générale de la puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_i(v^*) = \int_{\omega_t} Tr(AD(v^*)) dx$$

où A est un tenseur symétrique d'ordre 2 dont seule la partie symétrique intervient¹. En fait, on peut même montrer que le tenseur A est symétrique en utilisant l'équilibre des moments

1. En effet, on a $Tr(BD(v^*)) = 0$ pour tout tenseur antisymétrique B car $D(v^*)$ est symétrique.

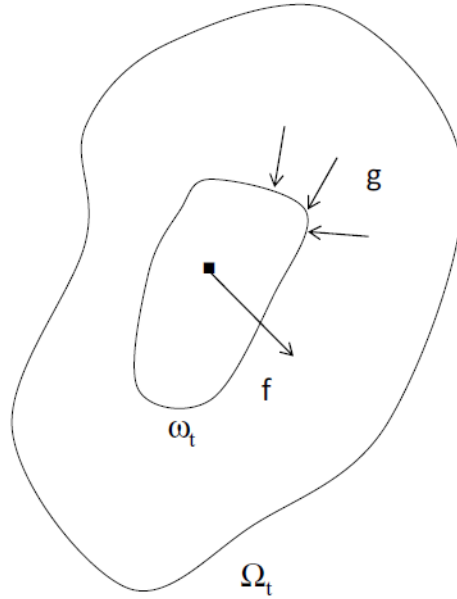


FIGURE 1.2 – Représentation des efforts intérieurs et extérieurs

sur ω_t . Par la suite, pour des raisons de convention de signe² :

$$A = -\sigma$$

où σ s'appelle le tenseur des contraintes de Cauchy. On verra plus tard son interprétation mécanique. On a donc :

$$(1.1) \quad \mathcal{P}_i(v^*) = - \int_{\omega_t} \text{Tr}(\sigma D(v^*)) dx = - \int_{\omega_t} \text{Tr}(\sigma \frac{\partial v^*}{\partial x}) dx$$

en utilisant les propriétés de l'opérateur trace. Afin d'arriver aux équations d'équilibre des milieux continus, il convient de transformer l'expression (1.1) de $\mathcal{P}_i(v^*)$. On a d'une part :

$$\text{div}(\sigma.v^*) = \text{div}\sigma.v^* + \text{Tr}(\sigma \frac{\partial v^*}{\partial x})$$

et d'autre part la formule d'Ostogradski. Il vient alors :

$$\mathcal{P}_i(v^*) = \int_{\omega_t} \text{div}\sigma.v^* dx - \int_{\partial\omega_t} (\sigma.n)v^* dS$$

2. Il s'agit des notations classiques de mécanique des solides, où la contrainte σ est positive en traction et négative en compression. C'est la convention de signe opposée qui est généralement utilisée en mécanique des sols.

1.2 Equations d'équilibre des milieux continus

1.2.1 Les équations d'équilibre eulériennes

Le principe des puissances virtuelles

$$\mathcal{P}_a(v^*) = \mathcal{P}_i(v^*) + \mathcal{P}_e(v^*) , \quad \forall v^* \in \mathcal{V} , \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

devient :

$$\int_{\omega_t} \rho \gamma dx = \int_{\omega_t} \operatorname{div} \sigma \cdot v^* dx - \int_{\partial \omega_t} (\sigma \cdot n) v^* dS + \int_{\omega_t} f \cdot v^* dx + \int_{\partial \omega_t} g \cdot v^* dS , \quad \forall v^* \in \mathcal{V}$$

que l'on peut écrire en regroupant les termes :

$$(1.2) \quad \int_{\omega_t} (\rho \gamma - f - \operatorname{div} \sigma) v^* dx + \int_{\partial \omega_t} (\sigma \cdot n - g) \cdot v^* dS = 0 , \quad \forall v^* \in \mathcal{V}$$

En choisissant des champs v^* nuls sur $\partial \omega_t$, l'équation (1.2) se réduit à :

$$\int_{\omega_t} (\rho \gamma - f - \operatorname{div} \sigma) v^* dx = 0 , \quad \forall v^* \in \mathcal{V} , \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

ce qui nous donne de façon équivalente :

$$(1.3) \quad \operatorname{div} \sigma + f = \rho \gamma \quad \text{dans } \omega_t , \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

En revenant maintenant à l'expression (1.2) du PPV, compte tenu de (1.3), on a :

$$\int_{\partial \omega_t} (\sigma \cdot n - g) \cdot v^* dS = 0 , \quad \forall v^* \in \mathcal{V}$$

ou de façon équivalente :

$$(1.4) \quad \sigma \cdot n = g \quad \text{sur } \partial \omega_t , \forall \omega_t \subset \Omega_t$$

où on rappelle que n désigne la normale unitaire extérieure au sous-domaine ω_t .

De façon classique, d'après l'équation (1.4) :

1. σ représente les efforts intérieurs s'exerçant au sein du milieu continu,
2. $g = \sigma \cdot n$ est appelé le vecteur contrainte. Sur la frontière $\partial \Omega_t$ de Ω_t , $g = \sigma \cdot n$ est une condition aux limites classique.

Ainsi, les équations d'équilibre eulériennes des milieux continus s'écrivent dans le domaine Ω_t :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma + f = \rho \gamma & \text{dans } \Omega_t \\ \sigma \cdot n = g & \text{sur } \partial \Omega_t \end{cases}$$

Si sur une partie de la frontière $\partial \Omega_1$, le milieu continu est encastré ou fixé, il convient de

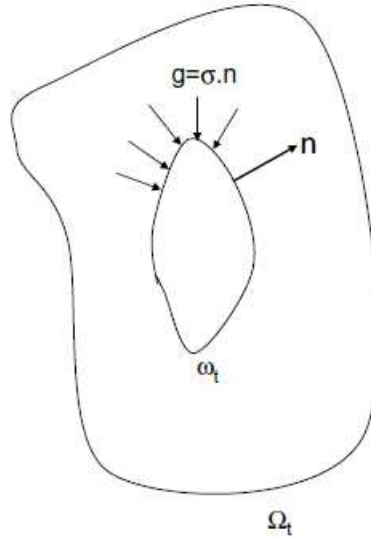


FIGURE 1.3 – Efforts intérieurs s'exerçant au sein du milieu continu

rajouter des conditions aux limites de type Dirichlet sur $\partial\Omega_1$ pour le déplacement (voir section 1.2.2).

En rajoutant l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

on a 4 équations pour 10 inconnues (ρ , les 3 composantes v_i de la vitesse, les 6 composantes indépendantes σ_{ij} du tenseur des contraintes symétrique). Les 6 équations manquantes pour que le problème soit résolvable vont être données par la loi de comportement, reliant le tenseur des contraintes σ au tenseur des vitesses de déformations $D(v)$. Dans le cas d'un solide élastique, la loi de comportement sera donnée en représentation Lagrangienne, dans la configuration initiale du milieu continu. Pour cela, il convient tout d'abord de se ramener à la configuration Lagrangienne, en transportant les équations d'équilibre Eulériennes (1.5) dans la configuration initiale.

1.2.2 Les équations d'équilibre lagrangiennes non linéaires

Considérons maintenant que le milieu continu (solide élastique \mathcal{S}) occupe le domaine Ω_0 de \mathbb{R}^3 dans sa configuration non déformée ou initiale. Le solide \mathcal{S} est en équilibre sous l'action des efforts volumiques $f : \Omega_t \mapsto \mathbb{R}^3$ et surfaciques $g : \partial\Omega_2 \mapsto \mathbb{R}^3$ s'exerçant dans la configuration déformée Ω . Le déplacement est supposé imposé nul (milieu continu encasté ou fixé) sur la partie $\partial\Omega_1$ de la frontière latérale, et les efforts g exercés sur la partie $\partial\Omega_2$, où $(\partial\Omega_1, \partial\Omega_2)$ est une partition de $\partial\Omega_t$.

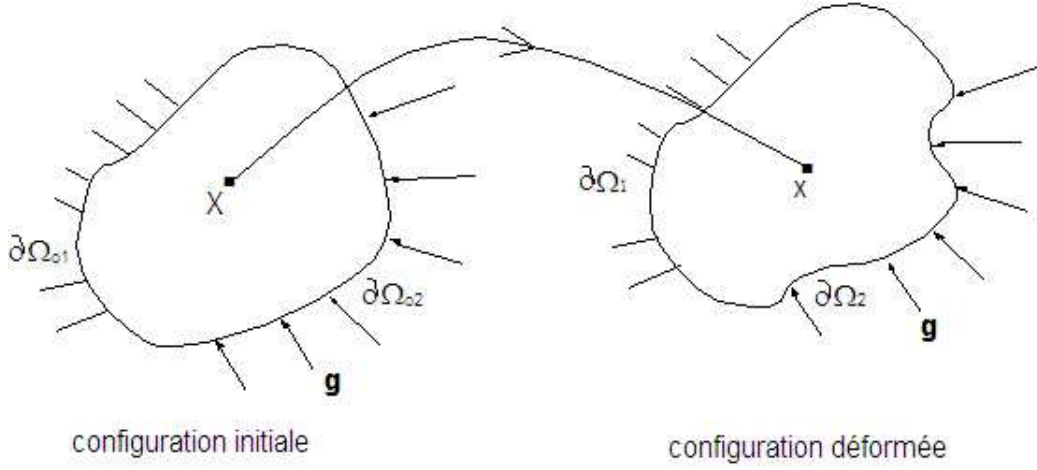


FIGURE 1.4 – Configurations initiale et déformée du milieu continu

Sous l'action des efforts, le solide \mathcal{S} s'est déformé. Un point matériel X de la configuration initiale Ω_0 a subi un déplacement $u(X)$ tel que :

$$\begin{aligned} u(X) : \Omega_0 &\rightarrow \Omega \\ X &\mapsto x = X + u(X) \end{aligned}$$

En repassant à la formulation faible équivalente des équations d'équilibre en formulation eulérienne, on peut montrer en transportant ces équations dans la configuration initiale, que les équations d'équilibre tridimensionnelles **non linéaires lagrangiennes** s'écrivent dans la configuration initiale³ Ω_0 (les efforts étant supposés ne pas dépendre de la configuration) :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \text{Div}(\Sigma \bar{F}) + f &= 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_{01} \\ (F\Sigma).n &= g & \text{sur } \partial\Omega_{02} \end{cases}$$

où :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = I + \frac{\partial u}{\partial X}$$

désigne l'application linéaire tangente à la transformation $X \rightarrow x = X + u(X)$, n la normale extérieure à \mathcal{S} , et la barre l'opérateur de transposition. Dans le cas **d'un solide homogène, isotrope et élastique**, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff⁴ Σ est relié au tenseur des déformations non linéaires de Green-Lagrange

$$E = \frac{1}{2}(\bar{F}F - I) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial X}$$

par la loi de comportement :

3. Pour simplifier le problème, on s'est limité aux équations d'équilibre en quasi-statique.

4. On peut montrer que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est relié à σ par la relation : $\Sigma = \det F F^{-1} \sigma \bar{F}^{-1}$.

$$\Sigma = \lambda (Tr E)I + 2\mu E$$

où I désigne l'identité de \mathbb{R}^3 et $Tr A = A_{ii}$ l'opérateur trace d'un endomorphisme.

1.2.3 Les équations d'équilibre linéarisées en H.P.P.

Dans le cadre de l'hypothèse de petits déplacements, on suppose que $u(X)$ ainsi que son gradient sont petits. Ainsi on ne va garder que les termes du premier ordre dans les équations d'équilibre non linéaires (1.6). On obtient les équations d'équilibre tridimensionnelles de l'élasticité linéaire :

$$(1.7) \quad \begin{cases} Div \sigma + f & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \sigma.n & = g & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

où les configuration initiale Ω_0 et finale Ω_t peuvent être confondues. On identifiera alors X et x . Maintenant, le tenseur des contraintes de Cauchy σ est relié au tenseur linéarisé des déformations

$$(1.8) \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)$$

par la loi de comportement de Hooke :

$$(1.9) \quad \sigma = \lambda (Tr \varepsilon)I + 2\mu \varepsilon$$

Il est important de noter que ces équations ne sont valables que pour des petits déplacements (hypothèse HPP).

Chapitre 2

Modèles de plaques minces élastiques

2.1 Le modèle linéaire de plaque de Kirchhoff-Love

Le modèle linéaire de plaque de Kirchhoff-Love est le modèle de plaques minces le plus simple valable en H.P.P. pour des tout-petits déplacements, lorsque le cisaillement transverse peut être négligé. Il repose sur les hypothèses cinématiques et statiques de Kirchhoff-Love. Il existe plusieurs façons d'obtenir le modèle de Kirchhoff-Love. Nous allons voir ici, comment il peut être déduit directement des équations d'équilibre tridimensionnelles de l'élasticité linéaire par intégration sur l'épaisseur, moyennant évidemment les hypothèses de Kirchhoff-Love.

2.1.1 Les équations tridimensionnelles

On suppose choisies une fois pour toutes une origine O et une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3 qui sera identifié à \mathbb{R}^3 . Dans tout ce qui suit :

- $Grad$ et Div désigneront le gradient et la divergence tridimensionnels,
- $grad$ et div le gradient et la divergence bidimensionnels,
- la barre désignera l'opérateur de transposition.

Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , de frontière γ suffisamment régulière, contenu dans le plan (O, e_1, e_2) . On note $m = (x_1, x_2)$ un point courant de ω . On définit les ensembles $\Omega = \omega \times]-h/2, h/2[$, $\Gamma = \gamma \times [-h/2, h/2]$ et $\Gamma^\pm = \bar{\omega} \times \{\pm h/2\}$.

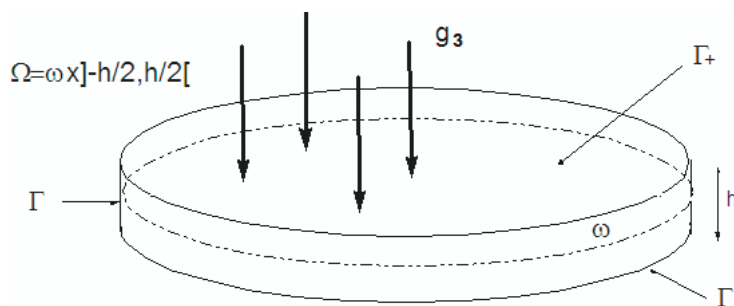


FIGURE 2.1 – Domaine tridimensionnel constituant la plaque

On considère une plaque mince, d'épaisseur h , de surface moyenne ω , occupant le domaine $\overline{\Omega}$ dans sa configuration initiale. Un point M de la plaque est alors repéré par sa projection orthogonale m sur ω et par sa coordonnée x_3 suivant l'épaisseur e_3 . Ainsi, on a $M = m + x_3 e_3$, que l'on note encore $M = (m, x_3)$.

Pour simplifier le problème, on suppose la plaque encastree sur son bord lateral Γ , soumise aux efforts surfaciques $g = \pm g_3^\pm e_3$ sur les faces superieure et inferieure Γ^\pm , ainsi qu'aux efforts volumiques $f = f_3 e_3$ dans Ω (voir fig. 2.1). On neglige les efforts dans le plan (Ox_1x_2) .

Sous l'effet des efforts appliques, la plaque se deforme et le deplacement d'un point m de la surface moyenne est donne par

$$u(m, 0) = \overrightarrow{mm'} = u_t(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)e_3$$

ou u_t designe le deplacement tangentiel dans le plan de la surface moyenne et w la fleche en m par rapport a l'etat initial (voir fig. 2.2).

2.1.2 Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love

Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love supposent que tout segment materiel normal a la surface moyenne de la plaque, reste apres deformation, normal a la surface moyenne deformee et de meme longueur (voir fig. 2.2).

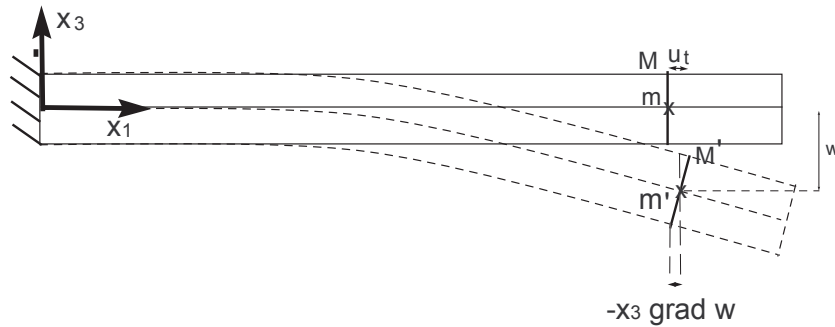


FIGURE 2.2 – Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love

Cette hypothese cinematique se traduit en termes de deplacement par :

$$\begin{aligned} (2.1) \quad u(M) = \overrightarrow{MM'} &= u(m, x_3) = u(m, 0) - x_3 \text{grad} w \\ &= u_t(x_1, x_2) - x_3 \text{grad} w + w(x_1, x_2)e_3 \end{aligned}$$

ou grad designe le gradient bidimensionnel par rapport aux variables (x_1, x_2) du plan tangent et ou $x_3 \text{grad} w$ represente la rotation d'un point M de cote x_3 suivant la normale e_3 .

Remarque 1 *Les deplacements u_t et w ne dependent pas de x_3 . Ce sont les inconnues du modele bidimensionnel de Kirchhoff-Love.*

En élasticité linéaire, le tenseur des déformations tridimensionnelles est donné par

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(Gradu + \overline{Gradu}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial M} + \overline{\frac{\partial u}{\partial M}}\right)$$

où $Grad$ désigne le gradient tridimensionnel.

On rappelle que si $U = U_t + we_3$ désigne un champ de vecteur de \mathbb{R}^3 défini en tout point M de la plaque, où U_t est dans le plan (Oe_1e_2) , alors le gradient tridimensionnel peut se décomposer sous la forme :

$$GradU = \begin{pmatrix} gradU_t & \frac{\partial U_t}{\partial x_3} \\ \overline{gradw} & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

dans la base (e_1, e_2, e_3) .

Ainsi, $\varepsilon(u)$ peut se décomposer sous la forme :

$$\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_s \\ \overline{\varepsilon_s} & \varepsilon_n \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

où $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ représente le tenseur des déformations planes, $\varepsilon_s = \begin{pmatrix} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$ le vecteur cisaillement transverse et $\varepsilon_n = \varepsilon_{33}$ la compression suivant l'épaisseur.

L'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love est équivalente à négliger le cisaillement transverse ε_s ainsi que le pincement ε_n . De plus on a :

$$(2.2) \quad \varepsilon_t = e_t(u_t) + x_3\rho_t(w)$$

où

$$(2.3) \quad e_t = \frac{1}{2}(gradu_t + \overline{gradu_t})$$

représente le tenseur bidimensionnel des déformations membranaires et

$$(2.4) \quad \rho_t = -grad(gradw)$$

le tenseur bidimensionnel de variation de courbure, qui est symétrique par définition du double gradient.

En effet, compte tenu de la forme (2.1) du champ de déplacement, en posant $U_t = u_t(x_1, x_2) - x_3gradw$, on a :

$$\frac{\partial U_t}{\partial x_3} = -gradw \Leftrightarrow \varepsilon_s = 0$$

D'autre part, comme $w(x_1, x_2)$ est indépendant de x_3 , on a $\varepsilon_n = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0$. Enfin, le calcul de (2.2) est évident avec :

$$\rho_t = -grad(gradw) = - \begin{pmatrix} w_{,11} & w_{,12} \\ w_{,12} & w_{,22} \end{pmatrix}$$

2.1.3 Hypothèse de contraintes planes

L'hypothèse de contraintes planes

Dans le repère (O, e_1, e_2, e_3) le tenseur des contraintes peut également se décomposer sous la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \frac{\sigma_s}{\sigma_t} & \sigma_n \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$$

où σ_t , σ_s et σ_n désignent respectivement les contraintes planes, de cisaillement et de pincement.

L'hypothèse statique de contraintes planes a été historiquement formulée par Kirchhoff et Love en se basant sur le raisonnement suivant. Si l'on considère une plaque non chargée sur ses faces supérieure et inférieure, de normale extérieure $n = \pm e_3$, alors les conditions aux limites sur Γ^\pm impliquent que $\sigma_s = \sigma_n = 0$. On est donc dans un état de contraintes planes, que l'on étend à toute la plaque, compte tenu de sa faible épaisseur.

Remarque 2 *Cette hypothèse de contraintes planes, pourtant en contradiction avec l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love¹, est classiquement utilisée pour obtenir la théorie des plaques de Kirchhoff-Love. En fait, les contraintes de pincement σ_n sont très faibles par rapport aux contraintes planes σ_t et sont donc négligeables, mais ne sont pas nulles exactement. On verra que cela peut se justifier rigoureusement par développement asymptotique des équations d'équilibre tridimensionnelles.*

Conséquences

La loi de comportement linéaire élastique de Hooke s'écrit :

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon$$

où λ et μ désignent les constantes de Lamé du matériau et I l'identité de \mathbb{R}^3 . L'hypothèse de contrainte plane $\sigma_n = 0$ implique que

$$\sigma_n = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_n = \lambda \text{Tr}(\varepsilon_t) + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_n = 0$$

On a donc $\varepsilon_n = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \text{Tr}(\varepsilon_t)$ et la loi de comportement prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \lambda \text{Tr}(\varepsilon)I_2 + 2\mu\varepsilon_t = \lambda \text{Tr}(\varepsilon_t)I_2 + 2\mu\varepsilon_t + \lambda\varepsilon_n I_2 \\ (2.5) \quad &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \text{Tr}(\varepsilon_t) + 2\mu\varepsilon_t \end{aligned}$$

C'est la loi de comportement classique en contraintes planes, que l'on peut écrire de façon équivalente :

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \text{Tr}(\varepsilon_t)I_2 + (1 - \nu)\varepsilon_t \right)$$

1. On ne peut pas avoir en même temps σ_n et $\varepsilon_n = 0$ d'après la loi de comportement de Hooke.

En revenant aux déplacements, on a :

$$(2.6) \quad \sigma_t = \frac{1}{2}n_t + \frac{3}{2}x_3m_t$$

où

$$(2.7) \quad \begin{aligned} n_t &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}Tr(e_t)I_2 + 4\mu e_t \\ &= \frac{2E}{1 - \nu^2} \left(\nu Tr(e_t)I_2 + (1 - \nu)e_t \right) \end{aligned}$$

représente le tenseur des contraintes membranaires et

$$(2.8) \quad \begin{aligned} m_t &= \frac{4\lambda\mu}{3(\lambda + 2\mu)}Tr(\rho_t)I_2 + \frac{4}{3}\mu\rho_t \\ &= \frac{2E}{3(1 - \nu^2)} \left(\nu Tr(\rho_t)I_2 + (1 - \nu)\rho_t \right) \end{aligned}$$

le tenseur des moments de flexion. Les tenseurs de déformation de membrane et de variation de courbure associés sont données par (2.3) et (2.4) :

$$e_t = \frac{1}{2}(gradu_t + \overline{gradu_t}) \quad \text{et} \quad \rho_t = -grad(gradw)$$

2.1.4 Equations d'équilibre bidimensionnelles

Les équations d'équilibre bidimensionnelles des plaques de Kirchhoff-Love se déduisent maintenant par intégration sur l'épaisseur des équations d'équilibre tridimensionnelles :

$$\begin{aligned} Div\sigma &= -f & \text{dans } \Omega \\ \sigma.n &= g^\pm & \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{aligned}$$

Compte tenu de la décomposition de σ , il est possible de décomposer les équations d'équilibre suivant la surface moyenne de la plaque et la normale e_3 . En notant div la divergence bidimensionnelle par rapport aux variables (x_1, x_2) , les équations d'équilibre tridimensionnelles s'écrivent² :

$$(2.9) \quad \begin{cases} div\sigma_t + \frac{\partial\sigma_s}{\partial x_3} = 0 & \text{dans } \omega \\ \sigma_s = 0 & \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{cases}$$

$$(2.10) \quad \begin{cases} div\sigma_s + \frac{\partial\sigma_n}{\partial x_3} = -f_3 & \text{dans } \omega \\ \sigma_n = \pm g_3^\pm & \text{pour } x_3 = \pm h/2 \end{cases}$$

2. En négligeant les efforts tangentiels.

On rappelle que la divergence bidimensionnelle d'un tenseur symétrique $\sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{(e_1, e_2, e_3)}$ est donnée par :

$$\operatorname{div} \sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} \end{pmatrix}$$

Ainsi la divergence d'un endomorphisme (ou d'un tenseur d'ordre 2) sera considérée comme un vecteur, alors que la divergence du vecteur $\sigma_s = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}$ est un scalaire :

$$\operatorname{div} \sigma_s = \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2}$$

Remarque 3 *On a utilisé dans ce chapitre les notations classiques de la MMC, où la divergence d'un endomorphisme (ou d'un tenseur d'ordre 2) est un vecteur de \mathbb{R}^3 . En fait, on verra au chapitre 3 que la divergence d'un champ d'endomorphismes définis sur une surface est un champ de formes linéaires. L'identification à un champ de vecteurs se fait ici de façon évidente via le produit scalaire de \mathbb{R}^3 . Dans le cas général, en théorie des coques, cette identification n'est plus possible aussi facilement et il faudra faire très attention.*

Equation de membrane

En intégrant l'équation (2.9) sur l'épaisseur (entre $-h/2$ et $h/2$ par rapport à la variable x_3), on obtient :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \operatorname{div} \sigma_t dx_3 + [\sigma_s]_{-h/2}^{h/2} = 0$$

Compte tenu de (2.6), du fait que n_t et m_t sont indépendants de x_3 , et en utilisant les conditions aux limites pour σ_s , on obtient la première équation d'équilibre dans le plan (ou équation de membrane) :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{h}{2} \operatorname{div}(n_t) = 0 & \text{dans } \omega \\ u_t = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Remarque 4 *Le problème (2.11) doit être regardé comme un problème en déplacements, d'inconnue u_t . En effet n_t est relié à e_t par la loi de comportement (4.12) et à u_t par (2.3). Dans le cas où aucun effort n'est exercé dans le plan (Ox_1x_2), l'unique solution du problème (2.11) est $u_t = 0$.*

Equation de flexion

Maintenant, multiplions l'équation (2.9) par x_3 , prenons la divergence de l'expression ainsi obtenue et intégrons le tout sur l'épaisseur. On obtient :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} x_3 \operatorname{div}(\operatorname{div} n_t) dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2} x_3^2 \operatorname{div}(\operatorname{div} m_t) dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \operatorname{div}\left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3}\right) dx_3 = 0$$

En utilisant ensuite l'équation (2.10) ainsi que les conditions aux limites, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial x_3} \right) dx_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\operatorname{div} \sigma_s) dx_3 \\
&= \left[x_3 \operatorname{div} \sigma_s \right]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \operatorname{div} \sigma_s dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + \left[\sigma_n \right]_{-h/2}^{h/2} \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + (g_3^+ + g_3^-)
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation d'équilibre en flexion :

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{h^3}{8} \operatorname{div}(\operatorname{div} m_t) = -p_3 & \text{dans } \omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où l'on a posé $p_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^-$, où ν désigne la normale unitaire extérieure à ω et $w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = (\operatorname{grad} w) \cdot \nu$ la dérivée normale du vecteur w .

Conditions aux limites

Les conditions aux limites de (2.12) se déduisent des conditions aux limites tridimensionnelles ainsi que de l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love. En effet, comme la plaque est encadrée sur son bord latéral $\Gamma = \gamma \times [-h/2, h/2]$, on $u = 0$ sur Γ . En utilisant (2.1), on en déduit que $u_t = w = 0$ et que $\operatorname{grad} w = 0$ sur γ . Or comme la valeur de $w = 0$ est déjà donnée sur γ , et donc sa dérivée tangentielle également, cette dernière condition ne nous donne que $\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$.

Remarque 5 *De même, le problème (2.12) doit être regardé un problème en déplacements, d'inconnue w . En effet m_t est relié à ρ_t par la loi de comportement (4.13) et à w par (2.4)*

L'équation (2.12) est plus connue sous la forme équivalente suivante (équation biharmonique) :

$$(2.13) \quad \begin{cases} D \Delta^2 w = p_3 & \text{dans } \omega \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ désigne la rigidité à la flexion et Δ le laplacien bidimensionnel.

En effet, avec les notations utilisées, on a :

- $div(\alpha I_2) = grad(\alpha)$
- $Tr(grad(grad\alpha)) = div(grad \alpha) = \Delta\alpha$ pour tout champ scalaire α
- $div(grad u) = \Delta u$ pour tout champ de vecteurs u .
- $\Delta(grad\alpha) = grad(\Delta\alpha)$ pour tout champ scalaire α .

Ainsi, il vient

$$div(m_t) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\nu grad(\Delta w) + (1-\nu)\Delta(grad w) \right)$$

avec $Tr(\rho_t) = -\Delta w$ et donc finalement :

$$div(div m_t) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w$$

2.1.5 Cas particulier d'une plaque circulaire sous chargement uniforme

On considère maintenant le cas particulier d'une plaque circulaire de rayon a , soumise à une pression uniforme p sur sa face supérieure. On néglige le poids en comparaison aux forces de pression exercées. Le problème étant axisymétrique, la déformée $w(r)$ est identique quel que soit le plan radial considéré.

La résolution des équations quasi-statiques associées à (2.13) est évidente dans un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ, e_3) , l'origine O étant prise au centre de la surface moyenne de la plaque. On vérifie ainsément que :

$$(2.14) \quad w = \frac{3}{16} \frac{p}{Eh^3} (1-\nu^2) (a^2 - r^2)^2$$

est solution. Si l'on admet l'unicité de la solution au problème de flexion de Kirchhoff-Love, alors c'est l'unique solution quasi-statique de (2.13).

2.2 Le modèle non linéaire de plaques de Von Karman

Le modèle de Kirchhoff-Love que nous avons établi dans la section précédente est valable pour de toutes petites déflexions³. Dans le cas de déflexions plus importantes, tout en restant modérées, il y a un couplage entre la déflexion w et le déplacement tangentiel u_t . Il faut dans ce cas utiliser un modèle de plaque non linéaire, comme celui de Von Karman dont les équations d'équilibre s'écrivent :

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{h}{2} \operatorname{div}(n_t) = 0 & \text{dans } \omega \\ D \Delta^2 w - h \operatorname{div}(n_t \operatorname{grad} w) = p_3 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

où le tenseur des contraintes de membrane n_t est relié à la déformation membranaire E_t par la même loi de comportement en contraintes planes que (2.5). Cependant la déformation de membrane E_t est non linéaire et s'écrit (à la différence de (2.3)) :

$$E_t = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u_t + \overline{\operatorname{grad} u_t} + \operatorname{grad} w \overline{\operatorname{grad} w})$$

Un des points importants de ce modèle est que les deux équations d'équilibre (dans le plan et suivant e_3) sont maintenant couplées (elles étaient découplées dans le modèle de Kirchhoff-Love). En particulier, l'équation de membrane (2.15) n'admet plus comme unique solution la solution nulle $u_t = 0$ en l'absence de forces tangentielles. En d'autres termes, un effort p_3 dans la direction e_3 engendrera non seulement une déflexion w , mais également un allongement de la surface moyenne caractérisé par u_t .

Il existe cependant un cas particulier simple où les équations de Von Karman se découplent : c'est lorsque l'équation de membrane admet comme solution $n_t = N_0$. L'équation de flexion s'écrit alors :

$$(2.16) \quad D \Delta^2 w - h \operatorname{div}(N_0 \operatorname{grad} w) = p_3$$

et est maintenant une équation linéaire en w découplée de l'équation de membrane.

Remarque 6 *L'établissement des équations d'équilibre de Von Karman (2.15) peut se faire de façon rigoureuse par développement asymptotique des équations d'équilibre tridimensionnelles non linéaires pour des efforts modérés. On montre alors que le modèle de Von Karman est valable pour des déflexions de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, alors que le modèle de Kirchhoff-Love est valable pour des niveaux d'efforts beaucoup plus faibles et des déflexions de l'ordre de ε fois l'épaisseur, où $\varepsilon = \frac{h}{L}$ désigne l'épaisseur relative de la plaque. Avec cette approche, les domaines de validité respectifs des modèles bidimensionnels se trouvent clairement précisés grâce aux nombres adimensionnels introduits (voir en particulier [16]).*

3. De l'ordre de $1/100^{\text{ème}}$ de fois l'épaisseur.

Chapitre 3

Formalisme intrinsèque de la théorie des surfaces

Nous nous proposons d'introduire ici un formalisme intrinsèque de la théorie des surfaces qui s'inspire largement des travaux de R. Valid [22][23][24][25], J. Breuneval [6][7][8][9] et P. Destuynder [10]. Ce formalisme intrinsèque permet de simplifier considérablement les calculs et d'introduire des objets géométriques qui possèdent une interprétation mécanique.

Une partie des résultats figurant ici seront utilisés à la section 3.9 où sont rappelées les éléments essentiels de l'approche surfacique de la théorie des membranes développée par J. Breuneval [8]. Ils seront également utiles à la compréhension des calculs développés aux chapitres suivants.

3.1 Surface paramétrée

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = (u, v) \mapsto p = f(x)$$

un plongement (immersion injective telle que U et $f(U)$ soient homéomorphes).

Définition 1

On dit que $\omega = f(U)$ est une surface paramétrée ou plongée dans \mathbb{R}^3 .

Le couple (U, f) est appelé carte de ω (c'est une carte globale). Par abus de langage on appellera f la carte. Dans les calculs qui vont suivre, on suppose que f est suffisamment régulière (par exemple de classe C^2).

Remarque 7

Pour des raisons de simplicité, on s'est restreint aux surfaces définies par une carte globale. Même si pour une sphère on démontre qu'il est impossible de définir une carte globale, les calculs qui vont suivre seront encore valables moyennant l'introduction de cartes locales et de la notion d'Atlas.

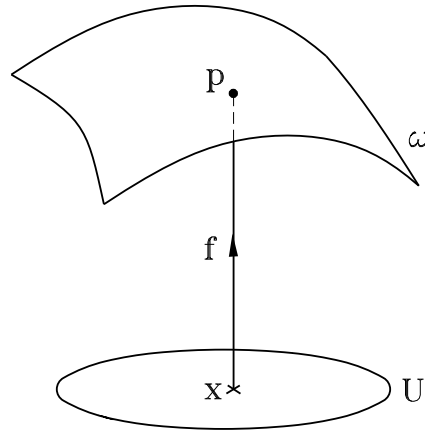


FIGURE 3.1 – Surface paramétrée

3.1.1 Base naturelle de ω

Comme f est une immersion injective, les vecteurs $a_1 = \frac{\partial f}{\partial u}$ et $a_2 = \frac{\partial f}{\partial v}$ sont indépendants et engendrent en chaque point p de ω un espace vectoriel appelé plan tangent en $p = f(x)$ à ω et noté $T_p\omega$. Les vecteurs (a_1, a_2) sont appelés base naturelle de $T_p\omega$.

On définit alors l'application linéaire tangente à $x \mapsto p = f(x)$, définie en chaque point x de U , par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\omega$$

$$dx \mapsto dp = \frac{\partial f}{\partial x} dx = S dx$$

Par abus de langage, on appellera parfois S la base naturelle de ω .

On définit également le vecteur unitaire $N = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|}$ orthogonal en p à $T_p\omega$, appelé normale unitaire en p à ω . On a alors la décomposition suivante de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 = T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$$

que l'on peut encore écrire

$$I_3 = \Pi + N\bar{N}$$

où Π représente la projection orthogonale sur $T_p\omega$, I_3 l'identité de \mathbb{R}^3 et la barre l'opérateur de transposition. On a en particulier $N\bar{N} = N \otimes N$ où \otimes désigne le produit tensoriel.

Tout vecteur V de \mathbb{R}^3 peut alors se décomposer en

$$(3.1) \quad V = \Pi V + N\bar{N}V = V_t + v_3 N$$

où V_t représente la projection orthogonale de V sur $T_p\omega$ et v_3 la projection orthogonale de V sur la normale N .

3.1.2 Première forme fondamentale

Comme ω est plongée dans \mathbb{R}^3 , en chaque point p de ω le produit scalaire de \mathbb{R}^3 induit un produit scalaire sur $T_p\omega$. Quand p varie sur ω , on définit ainsi un champ de tenseurs deux fois covariants, noté g . En chaque point p , on a :

$$g \in T_p^*\omega \otimes T_p^*\omega$$

où $T_p^*\omega$ désigne le dual de $T_p\omega$.

Définition 2

On appelle première forme fondamentale de la surface ω , le champ de formes quadratiques associé à g . Dans la base naturelle, la matrice associée à la première forme fondamentale est :

$$G = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x}$$

En carte locale, l'expression de G est $\bar{S}S$

3.2 Dérivée d'un champ de vecteurs à support sur une surface ω

3.2.1 Dérivée covariante d'un champ de vecteurs tangents

Soit $p \mapsto dp = Sdx$ et $p \mapsto V_t = SY$ deux champs de vecteurs tangents en p à ω . La dérivée dV_t du champ de vecteurs V_t suivant la direction dp n'est en général pas tangente à ω .

Définition 3

On définit alors sur ω une dérivation ∇ pour laquelle la dérivée d'un champ de vecteurs tangents reste tangente :

$$\nabla : T\omega \times T\omega \rightarrow T\omega$$

$$(dp, V_t) \mapsto \nabla_{dp} V_t \stackrel{\text{def}}{=} \Pi dV_t$$

$\nabla_{dp} V_t$ est la dérivée covariante, encore notée $\hat{d}V_t$, du champ de vecteurs V_t suivant la direction dp , dont l'expression dans la base locale s'écrit :

$$\nabla_{dp} V_t = S[dY + \Gamma(dx, Y)]$$

Γ est l'opérateur de Christoffel dont les composantes dans la base naturelle sont les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$. Γ caractérise la connection Riemannienne que l'on note par le symbole ∇ ou encore $\hat{\nabla}$.

Propriété 1

L'opérateur de Christoffel Γ est symétrique. On a :

$$\Gamma(Y, dx) = \Gamma(dx, Y) \Leftrightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\delta = \Gamma_{\beta\alpha}^\delta$$

Théorème 1

L'opérateur de Christoffel Γ est complètement déterminé par le système d'équations :

$$\begin{aligned} dG &= G\Gamma(dx) + \overline{\Gamma(dx)}G & \forall dx \in \mathbb{R}^2 \\ \Gamma(dx, Y) &= \Gamma(Y, dx) & \forall dx \in \mathbb{R}^2, \forall Y \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra se référer à J. Breuneval [8].

Ainsi, les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$ peuvent s'exprimer en fonction des composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et de leurs dérivées $\partial_\delta g_{\alpha\beta}$. On définit également les coefficients de Christoffel de seconde espèce :

$$(G\Gamma)_{\alpha\beta\mu} = \Gamma_{\alpha\beta|\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda g_{\lambda\mu}$$

La première équation du théorème précédent est plus connue sous la forme locale (deuxième formule de Ricci) :

$$\Gamma_{\alpha\beta|\mu} + \Gamma_{\mu\alpha|\beta} = g_{\beta\mu,\alpha}$$

On notera $\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}$ l'application linéaire tangente définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} &: T_p\omega \rightarrow T_p\omega \\ dp &\mapsto \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} dp = \hat{d}V_t \end{aligned}$$

Dans la base naturelle, elle est représentée par :

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma(Y)$$

3.2.2 Seconde forme fondamentale

Comme il a été dit précédemment, la dérivée dV_t d'un champ de vecteurs tangents $p \mapsto V_t$ dans la direction dp n'est en général pas tangente en p à ω . La partie normale $\overline{N}dV_t$ de la dérivée dV_t est représentée dans la base locale par la forme bilinéaire symétrique F telle que :

$$\overline{N}dV_t = \overline{dx}FY$$

Définition 4

On appelle seconde forme fondamentale de la surface ω , la forme quadratique associée à F .

Proposition 1

Soit $\frac{\partial N}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire tangente au champ $x \mapsto N$ de U dans \mathbb{R}^3 . On a alors :

$$F = -\frac{\overline{\partial N}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\overline{\partial p}}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x}$$

Preuve :

On a $\overline{N}dV_t = \overline{dx}FY = -\overline{dN}V_t \quad \forall V_t \in T_p\omega$ Car $\overline{N}V_t = 0 \Rightarrow \overline{N}dV_t + \overline{dN}V_t = 0$.

D'où $\overline{dx}FY = -\overline{dx} \frac{\overline{\partial N}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} Y \quad \forall dx \in \mathbb{R}^2, \forall Y \in \mathbb{R}^2$.

3.2.3 Opérateur de courbure

L'application linéaire tangente $\frac{\partial N}{\partial p} : dp \mapsto dN = \frac{\partial N}{\partial p} dp$ au champ $p \mapsto N(p)$ est un endomorphisme du plan tangent. En effet, $dN \in T_p\omega$ puisque $\overline{N}N = 1$, ce qui implique que $\overline{N}dN = 0$. L'endomorphisme noté $C = -\frac{\overline{\partial N}}{\partial p}$ est appelé opérateur de courbure. On montre classiquement que C est symétrique relativement au produit scalaire.

Dans la base naturelle associée à une carte f , C est représenté par la matrice $G^{-1}F$. En effet, on a :

$$F = \frac{\overline{\partial p}}{\partial x} C \frac{\partial p}{\partial x} = \overline{S}CS \quad \text{d'où} \quad S^{-1}CS = (\overline{S})^{-1}\overline{S}CS = G^{-1}F$$

3.2.4 Dérivée d'un champ de vecteurs tangents

Soient $p \mapsto dp$ et $p \mapsto V_t$ deux champs de vecteurs tangents. Alors la dérivée dV_t du champ de vecteurs V_t dans la direction dp s'écrit de façon intrinsèque

$$dV_t = \hat{d}V_t + (\overline{dp}CV_t)N$$

où C représente l'opérateur de courbure et $\hat{d}V_t = \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} dp$ la dérivée covariante de V_t suivant dp . On peut également écrire :

$$\frac{\partial V_t}{\partial p} = \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} + N\overline{V}_tC$$

3.2.5 Dérivation d'un champ de vecteurs quelconque à support sur une surface

Soit $p \mapsto V = V_t + v_3 N$ un champ de vecteurs défini sur ω à valeur dans \mathbb{R}^3 et $p \mapsto dp$ un champ de vecteurs tangents à ω en p .

Alors on définit la dérivée dV du champ de vecteurs $p \mapsto V$ dans la direction dp par :

$$dV = dV_t + dv_3 N + v_3 dN$$

L'application linéaire tangente associée

$$\frac{\partial V}{\partial p} : T_p \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$dp \mapsto \frac{\partial V}{\partial p} dp = dV$$

s'écrit alors :

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \left[\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} - v_3 C \right] + N \left[\overline{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p} \right]$$

On a, en effet

$$V = V_t + v_3 N \Rightarrow dV = dV_t + dv_3 N + v_3 dN$$

avec $dV_t = \hat{d}V_t + \overline{dp} C V_t N$ et $dN = -C dp$

d'où :

$$dV = \hat{d}V_t - v_3 C dp + N(\overline{dp} C V_t + dv_3)$$

3.3 Opérateurs différentiels sur une surface ω

3.3.1 Dérivation covariante d'un champ d'endomorphismes du plan tangent

Soit $p \mapsto A$ un champ d'endomorphismes du plan tangent ($A \in \mathcal{L}(T_p\omega)$) et $p \mapsto dp$, $p \mapsto V_t$ deux champs de vecteurs tangents.

Définition 5

On définit $\nabla_{dp}A$ la dérivée covariante en p , dans la direction dp du champ d'endomorphismes $p \mapsto A$, par :

$$\nabla_{dp}A.V_t = \nabla_{dp}(A.V_t) - A.\nabla_{dp}V_t \quad \forall p \mapsto dp \text{ et } p \mapsto V_t \text{ tangents}$$

3.3.2 Rotationnel et divergence d'un champ de vecteurs tangents

Sur toute surface orientable ω de \mathbb{R}^3 , il existe une 2-forme canonique $p \mapsto \sigma$ appelée forme surface définie par :

$$\begin{aligned} \sigma &: T_p\omega \times T_p\omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (dp, V_t) &\mapsto \sigma(dp, V_t) = \overline{N}(dp \wedge V_t) \end{aligned}$$

où \wedge désigne ici le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 . Toute 2-forme sur ω peut alors s'écrire $\lambda\sigma$, où $p \mapsto \lambda$ est un champ scalaire sur ω .

Il est encore possible d'écrire $\sigma(dp, V_t)$ sous la forme

$$\sigma(dp, V_t) = i_{dp}\sigma(V_t)$$

où $i_{dp}\sigma$ désigne le produit intérieur de la 2-forme σ par le vecteur dp .

On définit également l'endomorphisme Σ de $T_p\omega$ associé à σ par :

$$\sigma(dp, V_t) = \overline{V}_t\Sigma dp$$

Σ est la rotation d'angle $\pi/2$ autour de la normale.

La dérivée extérieure (notée encore d) d'une 1-forme sur ω étant une 2-forme que l'on peut noter $\lambda\sigma$, on définit alors le rotationnel et la divergence d'un champ de vecteurs tangents $p \mapsto V_t$ par :

$$\begin{aligned} d(\overline{V}_t) &= rot(V_t).\sigma \\ d(i_{V_t}\sigma) &= div(V_t)\sigma \end{aligned}$$

Les champs $p \mapsto rot(V_t)$ et $p \mapsto div(V_t)$ sont des champs scalaires sur ω .

Propriété 2

Soit $p \mapsto V_t$ un champ de vecteurs tangents et α un champ scalaire. Alors on a les propriétés suivantes :

1) $rot(\Sigma V) = div V$

2) $div(\alpha V_t) = \alpha div(V_t) + \overline{grad \alpha} V_t$ où $\overline{grad \alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$

3) $div(V_t) = Tr(\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p})$

4) Dans la carte $x \mapsto p$ où V_t est représenté par $x \mapsto Y$ ($V_t = SY$), on a :

$$div(V_t) = Tr(\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma(Y)) = Tr(\frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \frac{\partial \sqrt{\det(G)} Y}{\partial x})$$

3.3.3 Rotationnel et divergence d'un champ d'endomorphismes du plan tangent

Soit $p \mapsto A$ un champ d'endomorphismes de $T_p \omega$, $p \mapsto dp$ et $p \mapsto V_t$ deux champs de vecteurs tangents. On définit alors le rotationnel et la divergence du champ $p \mapsto A$ par :

$$rot A . \sigma(dp, V_t) = \overline{V_t} \nabla_{dp} A - \overline{dp} \nabla_{V_t} A$$

$$div A . \sigma(dp, V_t) = i_{dp} \sigma . \nabla_{V_t} A - i_{V_t} \sigma . \nabla_{dp} A$$

Les champs $p \mapsto rot A$ et $p \mapsto div A$ sont des champs de 1 formes sur ω .

Propriété 3

Soit $p \mapsto V_t$ un champ de vecteurs tangents, $p \mapsto A$ un champ d'endomorphismes de $T_p \omega$ et α un champ scalaire. Alors on a les propriétés suivantes :

5) $div(AV_t) = div A . V_t + Tr(A \frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p})$

6) $div(I_{T_p \omega}) = 0$ où $I_{T_p \omega}$ désigne l'identité du plan tangent

7) $div(\alpha I_{T_p \omega}) = \frac{\partial \alpha}{\partial p}$

$$8) \operatorname{rot}(\Sigma A) = \operatorname{div}(A)$$

$$9) \nabla_{V_i} \Sigma = 0$$

Remarque 8

Si on se donne deux champs de tenseurs symétriques définis positifs g et C sur une surface ω , on peut se demander à quelles conditions ils correspondent au tenseur métrique et à l'opérateur de courbure de ω . Les conditions que doivent vérifier g et C sont appelées équations de Gauss-Codazzi. L'équation de Codazzi est particulièrement simple et ne fait intervenir que la courbure C . Elle peut s'écrire sous la forme :

$$(3.2) \quad \operatorname{rot}(C) = 0$$

3.4 Déplacements virtuels

Un déplacement de la surface ω est une application différentiable

$$\begin{aligned} \phi &: [0, 1] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, p) &\mapsto \phi_u(p) = \phi(u, p) \end{aligned}$$

telle que $\forall u \in \mathbb{R}, \phi_u : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un plongement et ϕ_0 est l'identité sur ω .

Définition 6

On définit le champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 (généralement non tangents à ω) :

$$p \rightarrow \delta p = \frac{\partial}{\partial u} [\phi(u, p)]|_{u=0}$$

appelé déplacement virtuel de la surface ω .

Pour tout $u \in [0, 1]$, la surface $\omega_u = \phi_u(\omega)$ peut être rapportée une carte f_u , dépendant différentiablement de u , et telle que :

$$\forall p_u \in \omega_u, \quad p_u = f_u(x) = f(u, x)$$

Le déplacement virtuel δN de la normale unitaire N_u en p_u à ω_u a alors pour expression :

$$\delta N = \frac{\partial N_u}{\partial u} \Big|_{u=0}$$

Proposition 2

Le champ de vecteurs $p \mapsto \delta N$ ne dépend que du champ de déplacements virtuels $p \mapsto \delta p$.
On a :

$$\delta N = -\Pi \overline{\frac{\partial \delta p}{\partial p}} N$$

Le démonstration de ce résultat repose sur l'égalité $\delta dp = d\delta p$.

En effet, on a $\overline{N} dp = 0 \Rightarrow \overline{\delta N} dp = -\overline{N} \delta dp = -\overline{N} d\delta p = -\overline{N} \frac{\partial \delta p}{\partial p} dp, \quad \forall dp \text{ tangent.}$

Comme δN est tangent, on a bien le résultat annoncé.

Proposition 3

Les variations virtuelles δG et δF des première et deuxième formes fondamentales de ω ne dépendent que du champ de déplacements virtuels $p \mapsto \delta p$. On a :

$$\begin{aligned} \delta G &= GS^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} \Pi \delta p}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial} \Pi \delta p}{\partial p}} - 2\overline{N} \delta p C \right] S \\ \delta F &= FS^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} \Pi \delta p}{\partial p} - \overline{N} \delta p C \right] S - GS^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial} \delta N}{\partial p}} S \end{aligned}$$

Pour la démonstration de ce résultat, on pourra consulter [8].

3.5 Forme d'une surface matérielle

Définition 7

Une surface matérielle est la donnée :

- d'une variété \mathcal{V} de dimension 2 (à bord γ) plongeable dans \mathbb{R}^3 . Ses points sont les points matériels
- d'un ensemble \mathcal{C} de plongements Φ de \mathcal{V} dans \mathbb{R}^3

Si Φ_1 et $\Phi_2 \in \mathcal{C}$, alors il existe $\Phi : [0, 1] \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiable, tel que :

$$\begin{aligned} \Phi(0, M) &= \Phi_1(M) & \forall M \in \mathcal{V} \\ \Phi(1, M) &= \Phi_2(M) & \forall M \in \mathcal{V} \\ \forall t \in [0, 1], \quad \Phi(t, M) &= \Phi_t(M) \quad \text{est un plongement.} \end{aligned}$$

Si $M \in \mathcal{V}$ est un point matériel alors $p = \Phi(M)$ représente la position dans \mathbb{R}^3 du point matériel p dans la configuration Φ .

Remarque 9

\mathcal{V} représente en quelque sorte la matérialité de l'objet et $\omega = \Phi(\mathcal{V})$ sa position dans l'espace physique.

Etant données deux configurations, le difféomorphisme $\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ représente le changement de configuration :

$$p_1 = \Phi_1(M) \mapsto p_2 = \Phi_2(M)$$

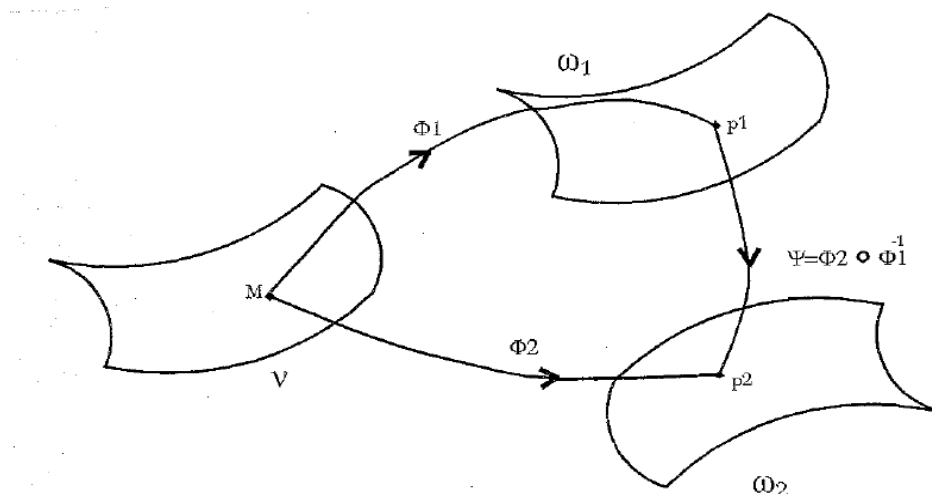


FIGURE 3.2 – Changement de configuration

Le groupe des isométries opérant sur \mathcal{C} , on peut définir la forme d'une surface matérielle de la façon suivante :

Définition 8

La forme d'une surface matérielle dans la configuration Φ est l'orbite de Φ par le groupe des isométries de \mathbb{R}^3 .

Autrement dit, Φ_1 et Φ_2 ont même forme s'il existe une isométrie i de \mathbb{R}^3 telle que l'on ait :

$$i|_{\omega_1} = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$$

Soient f_1 et f_2 les cartes respectives de ω_1 et de ω_2 , (G_1, G_2) et (F_1, F_2) les matrices représentatives des premières et deuxièmes formes fondamentales de ω_1 et de ω_2 .

Théorème 2

Deux configurations Φ_1 et Φ_2 ont même forme ssi :

$$\forall x \in U \quad G_1 = G_2 \quad \text{et} \quad F_1 = F_2$$

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra se reporter à [8].

3.6 Déformation

3.6.1 Déformation tangentielle

Soit Φ_0 la configuration de référence d'une surface matérielle, Φ sa configuration déformée (sous l'action d'efforts extérieurs) et ψ le changeur de configuration :

$$\begin{aligned} \Psi = \Phi \circ \Phi_0^{-1} & : \omega_0 \rightarrow \omega \\ p_0 & \mapsto \Psi(p_0) = p \end{aligned}$$

On définit alors la conformation tangentielle \mathbb{G} , application linéaire de $T_{p_0}\omega_0$ par :

$$\mathbb{G} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} \frac{\partial p}{\partial p_0}$$

où $\frac{\partial p}{\partial p_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial p_0}$ désigne l'application linéaire tangente à $p_0 \mapsto \Psi$.

\mathbb{G} est représenté dans la base naturelle S_0 de la configuration de référence par la matrice $G_0^{-1}G$. En effet, on a :

$$\mathbb{G} = S_0(G_0^{-1}G)S_0^{-1}$$

On définit également la déformation tangentielle

$$\Delta = \frac{1}{2}(\mathbb{G} - I_{T_{p_0}\omega_0})$$

qui est un tenseur mixte ou de façon équivalente un endomorphisme de $T_{p_0}\omega_0$.

3.6.2 Déformation des courbures

Les opérateurs de courbure C_0 et C de la configuration de référence et de la configuration déformée opèrent dans des espaces différents. Il est cependant possible de comparer C_0 à \tilde{C} , image réciproque de C définie par :

$$\tilde{C} = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} C \frac{\partial p}{\partial p_0}$$

Définition 9

La déformation des courbures est le tenseur mixte symétrique

$$K = \tilde{C} - C_0$$

représenté dans la base S_0 par la matrice $G_0^{-1}[F - F_0]$. En effet, on a :

$$K = S_0 G_0^{-1}[F - F_0] S_0^{-1}$$

On a alors le théorème suivant permettant de caractériser la déformation d'une surface :

Théorème 3

Pour que la configuration Φ ait la même forme que la configuration Φ_0 , il est nécessaire et suffisant que les champs $p_0 \mapsto \Delta$ et $p_0 \mapsto K$ soient nuls.

3.7 Connexion Riemannienne du changeur de configuration

Soient S_0 et S les bases naturelles en p_0 et p de ω_0 et ω . Soient $p_0 \mapsto V_t^0$ un champ de vecteurs tangents en p_0 à ω_0 et $p_0 \mapsto \Psi(p_0) = p$ un changeur de configuration. Soit alors $p \mapsto V_t = \frac{\partial p}{\partial p_0} V_t^0$ l'image directe de $p_0 \mapsto V_t^0$, champ de vecteurs tangents en p à ω .

La différence entre l'image réciproque de $\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p}$ et $\frac{\hat{\partial} V_t^0}{\partial p_0}$ ne dépend que de la valeur V_t^0 en p_0 du champ $p_0 \mapsto V_t^0$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial p_0} \right)^{-1} \frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\hat{\partial} V_t^0}{\partial p_0} &= S_0 S^{-1} . S \left[\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma(Y) \right] S^{-1} . S S_0^{-1} - S_0 \left[\frac{\partial Y}{\partial x} + \Gamma_0(Y) \right] S_0^{-1} \\ &= S_0 [\Gamma(Y) - \Gamma_0(Y)] S_0^{-1} \end{aligned}$$

où $V_t^0 = S_0 Y$ et $V_t = S Y$

Définition 10

La connexion Riemannienne du changeur de configuration $p_0 \mapsto p$ est le tenseur \mathcal{D} défini en tout point p_0 par :

$$\mathcal{D} : T_{p_0} \omega_0 \rightarrow \mathcal{L}(T_{p_0} \omega_0)$$

$$V_t^0 \mapsto \left(\frac{\partial p}{\partial p_0} \right)^{-1} \frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_0} - \frac{\hat{\partial} V_t^0}{\partial p_0} = \mathcal{D}(V_t^0)$$

pour tout $p_0 \mapsto V_t^0$ tangent et $p \mapsto V_t = \frac{\partial p}{\partial p_0} V_t^0 \in T_p \omega$

$\mathcal{D}(V_t^0)$ a pour expression la différence des connexions $[\Gamma - \Gamma_0](Y)$ dans deux cartes associées. En coordonnées locales, on a :

$$[\mathcal{D}(V_t^0)]_\alpha^\beta = [\Gamma_{\alpha k}^\beta - \Gamma_{0\alpha k}^\beta] Y^k \quad \text{où} \quad Y = (Y^1, Y^2) \in \mathbb{R}^2.$$

3.8 Application à la théorie des coques minces

Un résultat très utilisé en théorie des coques est la décomposition d'un point q de la coque en un point p de la surface moyenne et en une composante z suivant la normale à cette surface. On peut l'énoncer sous la forme suivante qui se trouve dans [8] :

Théorème 4

Soit ω une surface connexe de \mathbb{R}^3 , de classe C^1 . Alors il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , voisinage de ω , il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ et un difféomorphisme Θ défini par :

$$\Theta : \Omega \rightarrow \omega \times]-h, h[$$

$$q \mapsto \Theta(q) = (p, z) \text{ ssi } q = p + zN$$

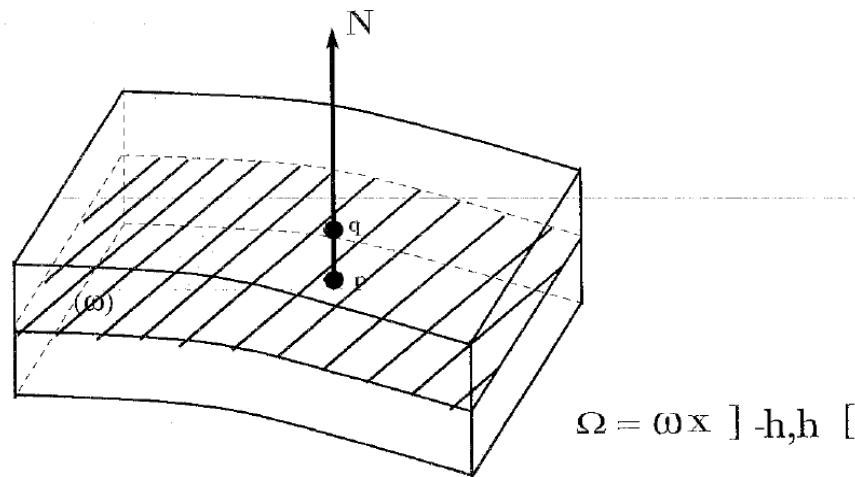


FIGURE 3.3 – Paramétrage de la coque

On identifie alors une coque de surface moyenne ω et d'épaisseur $2h$ à l'ouvert $\Omega = \omega \times]-h, h[$ de \mathbb{R}^3 .

3.8.1 Relation entre la divergence 3D et la divergence 2D d'un champ de vecteurs

Nous noterons ici Div la divergence tridimensionnelle d'un champ de vecteurs de la coque

(ouvert de \mathbb{R}^3) pour la distinguer de la divergence sur la surface moyenne définie précédemment et notée div . On verra qu'il existe une relation simple entre les opérateurs Div et div .

De façon classique, on définit la divergence tridimensionnelle d'un champ de vecteurs $q \mapsto V(q)$ d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 par :

$$(3.3) \quad DivV = Tr\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)$$

Le lemme suivant permet alors de relier la divergence tridimensionnelle à la divergence bi-dimensionnelle d'un champ de vecteurs d'une coque.

Lemme 1

L'application linéaire tangente $\frac{\partial V}{\partial q}$ au champ de vecteurs $q \mapsto V = V_t(p, z) + v_3(p, z)N$ de $\Omega = \omega \times]-h, h[$ peut se décomposer sur $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$ en :

$$(3.4) \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3C\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial V_t}{\partial z} \\ \left(\overline{V}_tC + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

où $\kappa^{-1} = \left(I_{T_p\omega} - zC\right)^{-1}$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned} dV &= dV_t + dv_3N + v_3dN \\ &= \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3C\right)dp + N\left(\overline{V}_tC + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)dp + \left(\frac{\partial V_t}{\partial z} + N\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)dz \end{aligned}$$

Or $q = p + zN \Rightarrow dq = (I_{T_p\omega} - zC)dp + Ndz$ et dans le cas des coques minces où $\forall q \in \Omega$, $I_{T_p\omega} - zC$ est inversible, on a alors :

$$\begin{cases} dp = (I_{T_p\omega} - zC)^{-1}\Pi dq \\ dz = \overline{N}dq \end{cases}$$

Ainsi il vient

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3C\right)\kappa^{-1}\Pi dq + N\left(\overline{V}_tC + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\Pi dq \\ &\quad + \frac{\partial V_t}{\partial z}\overline{N}dq + \frac{\partial v_3}{\partial z}N\overline{N}dq \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 1.

En utilisant alors le lemme 1, la divergence du champ de vecteurs $q \mapsto V$ de la coque $\Omega = \omega \times]-h, h[$ s'écrit :

$$DivV = Tr \left[\left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3 C \right) \kappa^{-1} \right] + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Or κ^{-1} étant un endomorphisme du plan tangent $T_p\omega$, on a

$$Tr \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \kappa^{-1} \right) = div(\kappa^{-1}V_t) - div(\kappa^{-1})V_t$$

et l'expression précédente de la divergence peut encore s'écrire :

$$(3.5) \quad DivV = div(\kappa^{-1}V_t) - div(\kappa^{-1})V_t - v_3 Tr(C\kappa^{-1}) + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

3.8.2 Relation entre la divergence 3D et la divergence 2D d'un champ d'endomorphismes

Il est également possible d'obtenir une relation entre la divergence tridimensionnelle et la divergence bidimensionnelle d'un champ d'endomorphismes d'une coque.

Soit ω une surface connexe de \mathbb{R}^3 régulière et σ un endomorphisme différentiable défini sur l'ouvert $\Omega = \omega \times]-h, h[$ de \mathbb{R}^3 dont la décomposition sur $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$ s'écrit : $\begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \bar{\sigma}_s & \sigma_n \end{pmatrix}$. On suppose que h est suffisamment petit pour que $\kappa = I_{T_p\omega} - zC$ soit inversible pour tout $z \in]-h, h[$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 5

La divergence de σ , forme linéaire définie sur $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$, est donnée par

$$Div \sigma = (\alpha \quad \beta)$$

où pour tout $z \in]-h, h[$, α est un champ de formes linéaires sur $T_p\omega$ et β un champ scalaire définis par :

$$\begin{aligned} \alpha &= div(\kappa^{-1}\sigma_t) - div(\kappa^{-1})\cdot\sigma_t - \bar{\sigma}_s \kappa^{-1}C - Tr(C\kappa^{-1})\bar{\sigma}_s + \frac{\partial \bar{\sigma}_s}{\partial z} \\ \beta &= div(\kappa^{-1}\sigma_s) - div(\kappa^{-1})\sigma_s + Tr(\sigma_t C \kappa^{-1}) - Tr(\kappa^{-1}C)\sigma_n + \frac{\partial \sigma_n}{\partial z} \end{aligned}$$

Démonstration

En utilisant une propriété classique de la divergence tridimensionnelle d'un champ d'endomorphismes $q \mapsto \sigma(q)$ d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , on a :

$$Div\sigma.V = Div(\sigma.V) - Tr \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial q} \right) \quad \forall q \mapsto V(q) \quad \text{champ de vecteurs de } \Omega$$

En décomposant alors V suivant $V = V_t + v_3 N$ et compte tenu de la décomposition de σ suivant $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$, on a

$$\sigma V = \begin{pmatrix} \sigma_t V_t + v_3 \sigma_s \\ \bar{\sigma}_s V_t + v_3 \sigma_n \end{pmatrix}$$

et en utilisant l'expression (3.5) de la divergence d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 , il vient :

$$\begin{aligned} Div(\sigma V) &= div(\kappa^{-1}\sigma_t V_t) - div(\kappa^{-1})\sigma_t V_t + div(v_3 \kappa^{-1}\sigma_s) - v_3 div(\kappa^{-1})\sigma_s \\ &\quad - (\bar{\sigma}_s V_t + v_3 \sigma_n) Tr(C\kappa^{-1}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\sigma}_s V_t + v_3 \sigma_n) \end{aligned}$$

Or σ_t et κ^{-1} étant deux endomorphismes du plan tangent $T_p\omega$, on a :

$$div(\kappa^{-1}\sigma_t V_t) = div(\kappa^{-1}\sigma_t)V_t + Tr\left(\kappa^{-1}\sigma_t \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}\right)$$

et

$$div(v_3 \kappa^{-1}\sigma_s) = v_3 div(\kappa^{-1}\sigma_s) + \frac{\partial v_3}{\partial p}\kappa^{-1}\sigma_s$$

Ainsi, l'expression précédente de $Div(\sigma V)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} (3.6) \quad Div(\sigma V) &= \left[div(\kappa^{-1}\sigma_t) - div(\kappa^{-1})\sigma_t - Tr(\kappa^{-1}C)\bar{\sigma}_s + \frac{\partial \bar{\sigma}_s}{\partial z} \right] V_t + v_3 \left[div(\kappa^{-1}\sigma_s) \right. \\ &\quad \left. - div(\kappa^{-1})\sigma_s - Tr(\kappa^{-1}C)\sigma_n + \frac{\partial \sigma_n}{\partial z} \right] + Tr(\kappa^{-1}\sigma_t \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}) + \frac{\partial v_3}{\partial p}\kappa^{-1}\sigma_s + \bar{\sigma}_s \frac{\partial V_t}{\partial z} + \sigma_n \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la décomposition de $\frac{\partial V}{\partial q}$ donnée au lemme 1, on a :

$$(3.7) Tr\left(\sigma \frac{\partial V}{\partial q}\right) = Tr\left[\sigma_t \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3 C\right)\kappa^{-1}\right] + Tr\left[\sigma_s \left(\bar{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\kappa^{-1}\right] + \bar{\sigma}_s \frac{\partial V_t}{\partial z} + \sigma_n \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Remarquant alors que

$$Tr\left(\sigma_s \bar{V}_t C \kappa^{-1}\right) = Tr\left(\kappa^{-1}\sigma_s \bar{V}_t C\right) = \bar{\sigma}_s \kappa^{-1} C V_t$$

d'une part, et que d'autre part

$$Tr\left(\sigma_s \frac{\partial v_3}{\partial p} \kappa^{-1}\right) = Tr\left(\kappa^{-1}\sigma_s \frac{\partial v_3}{\partial p}\right) = \frac{\partial v_3}{\partial p} \kappa^{-1} \sigma_s,$$

l'expression (3.7) peut encore s'écrire :

$$Tr\left(\sigma \frac{\partial V}{\partial q}\right) = \bar{\sigma}_s \kappa^{-1} C V_t - v_3 Tr\left(\kappa^{-1}\sigma_t C\right) + Tr\left(\kappa^{-1}\sigma_t \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial p} \kappa^{-1} \sigma_s + \bar{\sigma}_s \frac{\partial V_t}{\partial z} + \sigma_n \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Finalement, en faisant la différence entre (3.6) et (3.7), on aboutit à

$$Div\sigma.V = \alpha V_t + \beta v_3$$

pour tout champ de vecteurs $q \rightarrow V(q) = V_t + v_3 N$ de Ω ouvert de \mathbb{R}^3 . Les expressions de α et β sont celles du théorème 5 qui est ainsi prouvé.

3.9 Approche surfacique de la théorie des membranes

Nous présenterons ici les principaux éléments de l'approche surfacique de la théorie des membranes conservatives développée par J. Breuneval dans [7][8].

3.9.1 Milieu continu conservatif à deux dimensions

Un milieu continu conservatif à deux dimensions est la donnée :

i) d'une surface matérielle c'est-à-dire d'une variété \mathcal{V} de dimension deux plongeable dans \mathbb{R}^3 et d'un ensemble \mathcal{C} de plongements de \mathcal{V} dans \mathbb{R}^3 . Les plongements $\phi \in \mathcal{C}$ sont les configurations de la surface matérielle.

ii) d'une énergie de déformation \mathcal{E} qui à toute configuration $\phi \in \mathcal{C}$ associe un champ scalaire \mathcal{E} , appelé densité superficielle d'énergie de déformation.

Invariance par isométrie

Si deux configurations ϕ_1 et ϕ_2 ont même forme, alors les densités superficielles d'énergie associées vérifient $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Ce principe d'invariance par isométrie de l'énergie de déformation permet de définir $\mathcal{E} : \mathcal{C} / \sim \rightarrow \mathbb{R}$ où \sim désigne la relation d'équivalence :

$$\phi_1 \sim \phi_2 \quad \text{ssi} \quad \phi_1 \quad \text{et} \quad \phi_2 \quad \text{ont même forme}$$

Définition 11 *Une coque élastique est un milieu continu conservatif à deux dimensions, tel que les efforts aux bords sont de nature classique (forces et couples de flexion ou de torsion).*

Cette hypothèse restreint l'expression de l'énergie de déformation et revient à considérer une théorie du premier gradient.

3.9.2 Principe des puissances virtuelles

La forme générale des équations d'équilibre des plaques ou des coques élastiques conservatives peuvent se déduire directement du principe des puissances virtuelles écrit dans la configuration déformée.

Soit $\omega_0 = \phi_0(\mathcal{V})$ la configuration initiale (non déformée) de la surface matérielle considérée et $\omega = \phi(\mathcal{V})$ sa configuration déformée. Si l'on note α_p la valeur en p ($p \in \omega = \phi(\mathcal{V})$) de l'énergie de déformation de la surface matérielle dans sa configuration déformée, l'énergie totale de déformation W s'écrit alors :

$$W = \int_{\omega} \alpha_p \, d\omega = \int_{\omega_0} \alpha_p \sqrt{\det \mathbb{G}} \, d\omega_0 = \int_{\omega_0} \mathcal{E}_0 \, d\omega_0$$

D'après le théorème 3 de l'annexe A, la déformation peut être caractérisée par les champs de tenseurs symétriques $p_0 \mapsto \Delta$ et $p_0 \mapsto K$. Il est alors légitime de supposer que l'énergie

de déformation \mathcal{E}_0 est fonction de Δ et K ou de G et F (G et F représentant respectivement les première et deuxième forme fondamentales de la surface déformée ω). On peut montrer que ce choix est cohérent avec l'hypothèse d'efforts au bord de types classiques. On a alors :

$$W = \int_{\omega_0} \mathcal{E}_0(p_0, \Delta, K) d\omega_0$$

Lors du déplacement virtuel $p \mapsto \delta p = V_t + v_3 N$, la puissance des efforts intérieurs peut donc s'écrire sous la forme

$$\delta W = \int_{\omega_0} Tr \left[\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \Delta} \delta \Delta + \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial K} \delta K \right] d\omega_0$$

où

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} \frac{\partial p}{\partial p_0} - I_{T_{p_0}} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{G} - I_{T_{p_0}})$$

représente la déformation tangentielle et

$$K = \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} C \frac{\partial p}{\partial p_0} - C_0 = \tilde{C} - C_0$$

la déformation des courbures.

Remarque 10 *Dans le cas d'une plaque, la courbure initiale C_0 est nulle.*

Dans la base naturelle S_0 de la configuration de référence, \mathbb{G} et K sont représentés respectivement par les matrices $G_0^{-1}G$ et $G_0^{-1}[F - F_0]$. On a (voir annexe A.6) :

$$\mathbb{G} = S_0(G_0^{-1}G)S_0^{-1}$$

$$K = S_0G_0^{-1}[F - F_0]S_0^{-1}$$

Ainsi, les variations $\delta \Delta$ et δK de Δ et de K lors du déplacement virtuel $p \mapsto$ s'écrivent

$$\delta \Delta = \frac{1}{2} \delta \mathbb{G} = S_0 G_0^{-1} \delta G S_0^{-1}$$

$$\delta K = S_0 G_0^{-1} \delta F S_0^{-1}$$

où les variations de δG et δF sont données par (proposition 2 et 3 de l'annexe A.4) :

$$\delta G = GS^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p}} - 2v_3 C \right] S$$

$$\delta F = FS^{-1} \left[\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} - v_3 C \right] S - GS^{-1} \frac{\hat{\partial} \delta N}{\partial p} S$$

$$\delta N = - \left(CV_t + \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \right)$$

Il est alors possible de montrer que δW peut s'écrire sous la forme

$$(3.8) \quad \delta W = \int_{\omega} \left[\text{Tr} \left[A \frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} \right] - \text{Tr} [A C] - \text{Tr} \left[B \frac{\hat{\partial} \delta N}{\partial p} \right] \right] d\omega$$

où C représente l'opérateur de courbure de la configuration déformée et :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{G}}} \left[\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \Delta} \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_0} + \frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial K} \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_0} C \right]$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{G}}} \left[\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial K} \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_0} \right]$$

3.9.3 Equations d'équilibre de la théorie des membranes non compressées

Equations d'équilibre générales

Les équations d'équilibre générales de la théorie des membranes non compressées se déduisent alors en supposant que l'énergie de déformation ne dépend que de la déformation tangentielle (ou membranaire) Δ . Ainsi on a

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\Delta) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \Delta} = 0$$

et les expressions de A et B deviennent :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{G}}} \left[\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \Delta} \frac{\overline{\partial p}}{\partial p_0} \right]$$

$$B = 0$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors dans le cas d'une plaque ou d'une coque encastree sur son bord latéral :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } A = -F_t \quad \text{dans } \omega \\ \text{Tr}(AC) = -F_3 \quad \text{dans } \omega \end{array} \right.$$

Les équations d'équilibre (3.9) sont les équations d'équilibre les plus générales de la théorie des membranes, elles sont indépendantes de toute loi de comportement. Les efforts surfaciques F_t et F_3 qui équilibrent le travail des efforts intérieurs sont eulériens (exprimés dans la configuration déformée) et A représente le tenseur eulérien des contraintes membranaires.

Energie de déformation

L'expression de l'énergie de déformation surfacique \mathcal{E}_0 peut s'obtenir par intégration sur l'épaisseur de l'énergie de déformation tridimensionnelle, moyennant certaines hypothèses supplémentaires. En effet, si l'on se restreint au cas des

- faibles déformations ($\Delta \ll 1$)
- membranes tangentiellement isotropes

et si l'on suppose de plus que

- les feuilletts restent parallèles après déformation
- l'état des contraintes y est plan

alors il est possible de montrer [8] que l'énergie de déformation s'écrit

$$\mathcal{E}_0(\Delta) = 2h_0 \left\{ \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (Tr\Delta)^2 + \mu Tr(\Delta^2) \right\}$$

où h_0 représente la demi-épaisseur de la plaque ou de la coque dans la configuration de référence. On a alors

$$A = \frac{h_0}{\sqrt{\det \mathbb{G}}} \frac{\partial p}{\partial p_0} N_t \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}} = h_0 \hat{N}_t$$

où

$$N_t = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (Tr\Delta) I_{T_{p_0}\omega_0} + 4\mu\Delta$$

représente le tenseur lagrangien des déformations membranaires et

$$\hat{N}_t = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{G}}} \frac{\partial p}{\partial p_0} N_t \overline{\frac{\partial p}{\partial p_0}}$$

son transporté dans la configuration déformée.

Finalement, avec cette approche surfacique, les équations d'équilibre eulériennes (3.9) des membranes non comprimées s'écrivent sous la forme :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_0 \operatorname{div} \hat{N}_t = -F_t \quad \text{sur } \omega \\ h_0 \operatorname{Tr}(\hat{N}_t C) = -F_3 \quad \text{sur } \omega \end{array} \right.$$

Chapitre 4

Les modèles classiques de coques minces élastiques

Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir, en procédant de la même façon que pour les plaques, les modèles usuels de coques minces linéaires élastiques. De ce fait, on verra que la théorie des coques peut-être vue comme une généralisation de la théorie des plaques à "*un ouvert de référence courbé*". Pour ce faire, nous allons utiliser le formalisme intrinsèque de géométrie différentielle explicité au chapitre précédent. Avec ce formalisme intrinsèque, les calculs se font facilement sans avoir besoin de repasser aux composantes dans un système de coordonnées particulier. Bien évidemment, cela peut se faire ensuite, afin d'explicitier les équations d'équilibre obtenues pour un paramétrage particulier, dépendant de la géométrie de la coque considérée, pour procéder à la résolution des équations.

4.1 Hypothèses de Kirchhoff-Love

4.1.1 Description tridimensionnelle

Considérons une coque occupant le domaine $\Omega = \omega \times]-h, h[$ dans sa configuration initiale, que l'on identifiera à sa configuration déformée dans le cadre de la théorie HPP (Hypothèse Petites Perturbations) de l'élasticité linéaire. On utilise la décomposition classique (3.1) d'un champ de vecteur de V de \mathbb{R}^3 :

$$V = \Pi V + N \bar{N} V = V_t + v_3 N$$

où on rappelle que V_t représente la projection orthogonale de V sur $T_p \omega$ et v_3 sa projection orthogonale sur la normale N .

Pour l'instant on a priori $V_t = V_t(p, z)$ et $v_3 = V_3(p, z)$. En utilisant la décomposition (3.4)

du gradient d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 sur $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$, on a :

$$(4.1) \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} - v_3 C\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial V_t}{\partial z} \\ \left(\overline{V}_t C + \frac{\partial v_3}{\partial p}\right)\kappa^{-1} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

où $\kappa^{-1} = \left(I_{T_p\omega} - zC\right)^{-1} = I_{T_p\omega} + zC + z^2C^2 + z^3C^3 + \dots$ pour les coques minces. De ce fait, le tenseur des déformations tridimensionnelles classique de l'élasticité linéaire

$$\varepsilon(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \right)$$

peut s'écrire sous la forme (où q représente un point courant de la coque Ω) :

$$(4.2) \quad \varepsilon(V) = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(V) & \varepsilon_s(V) \\ \overline{\varepsilon_s(V)} & \varepsilon_n(V) \end{pmatrix}$$

avec

$$\varepsilon_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \right) - v_3 C \kappa^{-1}$$

$$\varepsilon_s(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_t}{\partial z} + \kappa^{-1} \left(C V_t + \frac{\partial v_3}{\partial p} \right) \right)$$

$$\varepsilon_n(V) = \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

4.1.2 Hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love

Les modèles classiques de coques minces élastiques sont construits à partir d'hypothèses cinématiques (l'équivalent des hypothèses de Kirchhoff-Love en théorie des plaques) et d'hypothèses statiques (de contraintes planes). Nous allons voir comment ces hypothèses cinématiques (de non cisaillement transverse et de non compression suivant l'épaisseur) conduisent à la forme générale du champ des déplacements.

De façon générale, on suppose que la déformation de la coque mince élastique se fait sans effort tranchant et donc sans cisaillement sur l'épaisseur. On a donc :

$$(4.3) \quad \varepsilon_s(V) = 0$$

D'autre part, on suppose également qu'il n'y a pas de compression suivant l'épaisseur, ce que l'on écrit :

$$(4.4) \quad \varepsilon_n(V) = 0$$

Il est évident que (4.4) conduit à $v_3 = v_3(p)$, où p désigne un point courant de la surface moyenne, i.e. que le déplacement normal est indépendant de l'épaisseur. Maintenant (4.3) implique que

$$\frac{\partial V_t}{\partial z} + \kappa^{-1} C V_t = -\kappa^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial p}$$

soit encore :

$$\kappa^{-1} \frac{\partial V_t}{\partial z} + \kappa^{-2} C V_t = -\kappa^{-2} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$$

Or, on peut montrer que l'on a $\frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} = C \kappa^{-2}$. En effet, compte tenu du développement de

$$\kappa^{-1} = I_{T_p \omega} + zC + z^2 C^2 + z^3 C^3 + \dots,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial z} &= C + 2zC^2 + 3z^2 C^3 + \dots \\ &= C (I_{T_p \omega} + 2zC + 3z^2 C^2 + \dots) \\ &= C \kappa^{-2} \end{aligned}$$

L'hypothèse de non cisaillement transverse conduit donc à :

$$(4.5) \quad \varepsilon_s(V) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z} (\kappa^{-1} V_t) = -\kappa^{-2} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$$

Si on considère $\kappa^{-1} V_t$ comme inconnue, la solution générale de (4.5) est la somme :

- de la solution de l'équation homogène $\underline{V}_t(p)$
- d'une solution particulière $-z\kappa^{-1} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$

Ainsi, on obtient la forme générale de la cinématique vérifiant les hypothèses de non cisaillement de non compression dans l'épaisseur :

$$(4.6) \quad \begin{cases} V_t = \kappa \underline{V}_t(p) - z \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \\ v_3 = v_3(p) \end{cases}$$

Preuve :

Il suffit de vérifier que $-z\kappa^{-1} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$ est bien une solution particulière de (4.5). On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(-z\kappa^{-1} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \right) &= -\kappa^{-1} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} - zC\kappa^{-2} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \\ &= -(\kappa^{-1} + zC\kappa^{-2}) \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} = -\kappa^{-2} \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\kappa^{-1} = \kappa^{-2} \kappa = \kappa^{-2} (I_{T_p \omega} - zC) \Leftrightarrow \kappa^{-1} + zC\kappa^{-2} = \kappa^{-2}$$

Conclusion

Les hypothèses cinématiques de "Kirchhoff-Love" $\varepsilon_s(V) = 0$ et $\varepsilon_n(V) = 0$ conduisent à la forme générale du champ de déplacement :

$$(4.7) \quad \begin{cases} V_t = \underline{V}_t(p) + z\Theta(p) & \text{avec} \quad \Theta(p) = -C\underline{V}_t(p) - \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \\ v_3 = v_3(p) \end{cases}$$

Le vecteur $\Theta(p) = -C\underline{V}_t(p) - \overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$ est généralement appelé vecteur tourbillon transverse. Il représente la tendance qu'à le vecteur dp à sortir du plan tangent $T_p\omega$.

4.1.3 Hypothèse de contraintes planes

En utilisant la même décomposition locale suivant le plan tangent et la normale à la surface moyenne de la coque (suivant $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$), le tenseur des contraintes peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_s \\ \overline{\sigma_s} & \sigma_n \end{pmatrix}_{T_p\omega \oplus \mathbb{R}N}$$

où σ_t , σ_s et σ_n désignent respectivement les contraintes planes, de cisaillement et de pincement.

De même que pour les plaques au chapitre 2, si l'on considère que la coque est non chargée sur ses faces supérieure et inférieure, de normale extérieure N , alors les conditions aux limites impliquent que $\sigma_s = \sigma_n = 0$. On est donc dans un état de contraintes planes, que l'on étend à toute la coque, compte tenu de sa faible épaisseur. Cette hypothèse de contraintes planes est également ici en contradiction avec l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love, car on ne peut pas avoir en même temps σ_n et $\varepsilon_n = 0$ d'après la loi de comportement. En fait, comme en théorie des plaques, on peut montrer en utilisant les approches asymptotiques, que les contraintes de pincement σ_n sont très faibles par rapport aux contraintes planes σ_t et sont donc négligeables, mais ne sont pas nulles exactement.

L'hypothèse de contraintes planes conduit donc à l'expression du tenseur des contraintes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{T_p\omega \oplus \mathbb{R}N}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} Tr(\varepsilon_t) I_{T_p\omega} + 2\mu\varepsilon_t \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu Tr(\varepsilon_t) I_{T_p\omega} + (1 - \nu)\varepsilon_t \right) \end{aligned}$$

Exprimons maintenant σ_t en fonction de \underline{V}_t et de v_3 . On a :

$$\varepsilon_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial} V_t}{\partial p}} \right) - v_3 C \kappa^{-1}$$

où le déplacement tangentiel V_t est donné par (4.7). On a donc :

$$\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} = \frac{\partial V_t}{\partial p} + z \frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p}$$

On en déduit donc que :

$$(4.8) \quad \varepsilon_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}} \right) + \frac{1}{2} z \left(\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p} \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \overline{\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p}} \right) - v_3 C \kappa^{-1}$$

En ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à un en z dans le développement de κ^{-1} , on a

$$\kappa^{-1} = I_{T_p\omega} + zC + O(z^2)$$

Cette hypothèse se justifie dans le cas des coques minces où l'épaisseur h est très petite devant les autres dimensions de la coque. Ainsi, l'expression (4.8) du tenseur de déformation plane devient :

$$(4.9) \quad \varepsilon_t(V) = \gamma_t(V) + z\rho_t(V)$$

avec

$$(4.10) \quad \begin{cases} \gamma_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}} \right) - v_3 C \\ \rho_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}\Theta(p)}{\partial p}} + \frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} C + C \overline{\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}} \right) - v_3 C^2 \end{cases}$$

- $\gamma_t(V)$ s'appelle le tenseur des déformations membranaires et caractérise la variation de la métrique lors de la déformation.

- $\rho_t(V)$ est le tenseur de variation de courbure due au déplacement $V = V_t + v_3 N$. Sous cette forme, il correspond à l'expression du tenseur de variation de courbure du modèle de Koiter que l'on trouve dans la littérature (voir en particulier [4][10][21]).

Ainsi, comme en théorie des plaques, on écrit traditionnellement le tenseur des contraintes planes σ_t sous la forme :

$$(4.11) \quad \sigma_t = \frac{1}{2} n_t + \frac{3}{2} x_3 m_t$$

où les tenseur des contraintes membranaires n_t et des moments de flexion m_t s'expriment en fonction des déplacements de la façon suivante :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} n_t &= \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} Tr(\gamma_t) I_{T_p\omega} + 4\mu\gamma_t \\ m_t &= \frac{4\lambda\mu}{3(\lambda + 2\mu)} Tr(\rho_t) I_{T_p\omega} + \frac{4}{3}\mu\rho_t \end{aligned}$$

On peut les exprimer également de façon équivalente en fonction du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν suivant :

$$(4.13) \quad \begin{aligned} n_t &= \frac{2E}{1-\nu^2} \left(\nu \text{Tr}(e_t) I_{T_p\omega} + (1-\nu)e_t \right) \\ m_t &= \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\nu \text{Tr}(\rho_t) I_{T_p\omega} + (1-\nu)\rho_t \right) \end{aligned}$$

4.2 Le modèle de coques minces élastiques de Novozhilov-Donnell

Le modèle de coques minces de Novozhilov-Donnell, valable en élasticité linéaire (HPP), constitue la généralisation du modèle de Kirchhoff-Love à la théorie des coques. C'est un des modèles les plus simples existant, couplant la déformation de membrane et la variation de courbure, permettant des résolutions analytiques dans des cas simples. Il est obtenu à partir :

1. des équations d'équilibre 3D de l'élasticité linéaire en approximant κ^{-1} par $I_{T_p\omega}$
2. des hypothèses de Kirchhoff-Love en approximant le tenseur de variation de courbure de Koiter ρ_t par :

$$(4.14) \quad \rho_t(V) = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p} \left(\overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \right)$$

qui est un tenseur d'ordre 2. En effet, $\frac{\partial v_3}{\partial p}$ est une forme linéaire (ou un covecteur) sur $I_{T_p\omega}$.

Son transposé $\overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}}$ est donc un vecteur du plan tangent dont la dérivée covariante a un sens. C'est le pendant de l'expression (2.4) de ρ_t que l'on avait obtenue dans le cas des plaques¹ au chapitre 2.

Remarque 11 *L'approximation (4.14) revient à ne garder que les termes à l'ordre zéro (en $O(1)$) par rapport à l'opérateur de courbure C (ou à sa norme $\|C\|^2 = \text{Tr}(C^2)$) dans l'expression générale (4.10) du tenseur de variation de courbure du modèle de Koiter. De ce fait, le modèle de Novozhilov-Donnell est valable pour les coques faiblement courbées où $\|C\| \ll 1$, i.e. pour une surface moyenne de la coque "peu éloignée" de la configuration plane. On verra au chapitre suivant, que cela peut se montrer rigoureusement par développement asymptotique des équations d'équilibre de l'élasticité linéaire ou non linéaire.*

4.2.1 Rappel des hypothèses statiques et cinématiques

Les hypothèses simplifiées de Kirchhoff-Love et la linéarisation (4.14) du tenseur de variation de courbure conduisent à l'expression suivante de la déformation plane tridimensionnelle :

1. On rappelle que dans le cas des plaques, on a $\rho_t = -\text{grad}(\text{grad}w)$.

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t(V) = \gamma_t(V) + z\rho_t(V) \\ \gamma_t(V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p} + \overline{\frac{\hat{\partial}V_t}{\partial p}} \right) - v_3 C \\ \rho_t(V) = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p} \left(\overline{\frac{\partial v_3}{\partial p}} \right) \end{array} \right.$$

D'autre part, on rappelle que l'hypothèse de contraintes planes conduit à :

$$(4.16) \quad \sigma_t = \frac{1}{2}n_t + \frac{3}{2}x_3m_t$$

où les tenseurs de contraintes membranaires n_t et m_t sont donnés par (4.12) et (4.13).

On va voir maintenant comment obtenir simplement les équations d'équilibre du modèle de Novozhilov-Donnell à partir des équations d'équilibre 3D de l'élasticité linéaire, en y injectant les hypothèses de Kirchhoff-Love.

4.2.2 Le problème tridimensionnel de départ

Une coque mince étant avant tout un milieu continu 3D de faible épaisseur, repartons des équations d'équilibre 3D de l'élasticité linéaire décomposées suivant $T_p\omega \oplus \mathbb{R}N$, en utilisant les résultats du théorème 5 du chapitre 3. Dans le cas du modèle de Novozhilov-Donnell, les hypothèses de contraintes planes conduisent à considérer un tenseur des contraintes tridimensionnel de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais avec les dérivées de σ_s et de σ_n non nulles².

En considérant que³ $\kappa^{-1} \simeq I_{T_p}$ dans les équations d'équilibre 3D, ces dernières deviennent :

$$(4.17) \quad \operatorname{div}\sigma_t + \overline{\frac{\partial\sigma_s}{\partial z}} = -\bar{f}_t \quad \text{dans } \omega$$

$$(4.18) \quad \operatorname{div}\sigma_s + \operatorname{Tr}(\sigma_t C) + \frac{\partial\sigma_n}{\partial z} = -f_3 \quad \text{dans } \omega$$

où $f = (f_t, f_3)$ désignent les efforts volumiques exercés au sein de la coque.

2. En effet, l'hypothèse de contraintes planes nous a amené à considérer que les contraintes de cisaillement σ_s et de pincement σ_n étaient nulles sur toute l'épaisseur de la coque. En fait, elles sont négligeables devant les contraintes tangentielles σ_t mais ne sont pas nulles exactement, sauf au niveau des faces supérieures et inférieures si la coque n'est pas chargée. De ce fait, leurs dérivées peuvent prendre des valeurs non négligeables, voire importantes, et doivent être considérées dans la décomposition des équations d'équilibre 3D données par le théorème 5.

3. Cette hypothèse revient à considérer que la coque est faiblement courbée, comme pour la linéarisation du tenseur de variation de courbure.

Les conditions aux limites associées

Les conditions aux limites sur les faces supérieures et inférieures sont données par :

$$(4.19) \quad \begin{cases} \sigma_s = \pm g_t^\pm & \text{sur } \Gamma_\pm \\ \sigma_n = g_3^\pm & \text{sur } \Gamma_\pm \end{cases}$$

où Γ_\pm désignent les faces supérieures et inférieures de la coque, et $g^\pm = (g_t^\pm, g_3^\pm)$ les efforts surfaciques s'y exerçant. Sur le bord latéral $\Gamma = \gamma \times]-h, h[$, si la coque est encadrée, on a les conditions aux limites naturelles d'encastrement correspondant à la cinématique de Kirchhoff-Love :

$$(4.20) \quad \begin{cases} V_t = 0 & \text{sur } \gamma \\ v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial p} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

où $\gamma = \partial\omega$ désigne la frontière extérieure à la surface moyenne ω .

4.2.3 Equations d'équilibre bidimensionnelles de Novozhilov-Donnell

Les équations d'équilibre bidimensionnelles du modèle de Novozhilov-Donnell s'obtiennent en intégrant sur l'épaisseur les équations d'équilibre tridimensionnelles de l'élasticité linéaire, en prenant en compte les hypothèses de Kirchhoff-Love. On va voir que le calcul est similaire à celui effectué en théorie des plaques au chapitre 2, une fois les outils appropriés de géométrie différentielle introduits.

Equation de membrane

En intégrant l'équation (4.17) sur l'épaisseur, entre $-h$ et h par rapport à la variable z , on obtient⁴ :

$$\int_{-h}^h \operatorname{div} \sigma_t dz + [\bar{\sigma}_s]_{-h}^h = - \int_{-h}^h \bar{f}_t dz$$

Compte tenu de (4.16), du fait que n_t et m_t sont indépendants de z , et en utilisant les conditions aux limites (4.19) pour σ_s , on obtient la première équation d'équilibre dans le plan tangent, appelé équation de membrane :

$$(4.21) \quad h \operatorname{div} n_t = -\bar{p}_t \quad \text{dans } \omega$$

où l'on a posé $p_t = \int_{-h}^h f_t dz + g_t^+ + g_t^-$.

4. Notons que dans le chapitre 2, on a considéré une plaque d'épaisseur h (l'intégration se faisant de $-h/2$ à $h/2$) afin de retrouver l'expression classique de la rigidité à la flexion D . Dans le cas des coques, afin de ne pas avoir de coefficient $1/2$, on considère une épaisseur $2h$ et l'intégration sur l'épaisseur se fait de $-h$ à h . Il est évident que les résultats sont équivalents à un facteur multiplicatif près.

Equation de flexion

Multiplions l'équation (4.17) par z , prenons sa transposée de façon à obtenir des champs de vecteurs (et non de covecteurs) du plan tangent, et prenons ensuite la divergence de l'expression ainsi obtenue. En intégrant cette expression sur l'épaisseur, on obtient :

$$(4.22) \int_{-h}^h \frac{1}{2} z \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} n_t}) dz + \int_{-h}^h \frac{3}{2} z^2 \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t}) dz + \int_{-h}^h z \operatorname{div}\left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z}\right) dz = - \int_{-h}^h z \operatorname{div} f_t dz$$

Le troisième terme du premier membre de l'équation (4.22) devient en utilisant les conditions aux limites (4.19) :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \int_{-h}^h z \operatorname{div}\left(\frac{\partial \sigma_s}{\partial z}\right) dz &= \operatorname{div}\left(\int_{-h}^h z \frac{\partial \sigma_s}{\partial z} dz\right) \\ &= \operatorname{div}\left[z \sigma_s\right]_{-h}^h - \operatorname{div}\left(\int_{-h}^h \sigma_s dz\right) \\ &= \operatorname{div}\left[h(g_t^+ - g_t^-)\right] - \operatorname{div}\left(\int_{-h}^h \sigma_s dz\right) \end{aligned}$$

Le dernier terme peut-être calculé en utilisant l'équation (4.18) ainsi que les conditions aux limites (4.19). En intégrant (4.18) sur l'épaisseur, on obtient :

$$\int_{-h}^h \operatorname{div} \sigma_s dz + h \operatorname{Tr}(n_t C) = - \int_{-h}^h f_3 dz - g_3^+ - g_3^-$$

soit encore :

$$(4.24) \quad \operatorname{div}\left(\int_{-h}^h \sigma_s dz\right) + h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3$$

où

$$p_3 = \int_{-h}^h f_3 dz + g_3^+ + g_3^-$$

désigne la résultante des efforts normaux (suivant N) sur l'épaisseur. Finalement, compte tenu de (4.16), de (4.23) et (4.24), l'équation (4.22) conduit à l'équation d'équilibre en flexion :

$$(4.25) \quad h^3 \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t}) + h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3 - \operatorname{div} M_t \quad \text{dans } \omega$$

avec

$$p_3 = \int_{-h}^h f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^-, \quad M_t = \int_{-h}^h z f_t dx_3 + h(g_t^+ - g_t^-)$$

Finalement, les équations d'équilibre du modèle de Novozhilov-Donnell s'écrivent :

$$(4.26) \quad \begin{cases} h \operatorname{div} n_t = -\bar{p}_t & \text{dans } \omega \\ h^3 \operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t}) + h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3 - \operatorname{div} M_t & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec

$$p_t = \int_{-h}^h f_t dz + g_t^+ + g_t^-, \quad p_3 = \int_{-h}^h f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^-, \quad M_t = \int_{-h}^h z f_t dx_3 + h(g_t^+ - g_t^-)$$

Conditions aux limites associées

Considérons le cas simple d'une coque encastree sur toute la partie $\Gamma = \gamma \times]-h, h[$ de son bord latéral. Dans ce cas, les conditions aux limites s'écrivent :

$$(4.27) \quad \begin{cases} V_t = 0 & \text{sur } \gamma \\ v_3 = \frac{\partial v_3}{\partial p} = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

4.3 Le modèle de membrane

Le modèle de membrane est un modèle obtenu pour des coques de très faibles épaisseurs (des *membranes*) lorsque $h^3 \ll h$, i.e. lorsque l'énergie de flexion est négligeable devant celle de membrane. Les équations d'équilibre associées s'obtiennent donc aisément à partir de celles du modèle de Novozhilov-Donnell en négligeant le terme de flexion. On obtient :

$$(4.28) \quad \begin{cases} h \operatorname{div} n_t = -\bar{p}_t & \text{dans } \omega \\ h \operatorname{Tr}(n_t C) = -p_3 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec

$$p_t = \int_{-h}^h f_t dz + g_t^+ + g_t^-, \quad p_3 = \int_{-h}^h f_3 dx_3 + g_3^+ + g_3^-$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent $V_t = 0$ dans le cas du bord latéral bloqué ou encastree. Notons qu'aucune condition ne peut être imposée sur v_3 .

Le modèle de membrane est le modèle le plus simple de coques minces, dont les équations d'équilibre peuvent s'intégrer directement et conduisent aux expressions de n_t sans avoir besoin de calculer les déplacements, ni les déformations membranaires γ_t .

4.4 Les limitations des approches basées sur des hypothèses a priori

L'objectif de ce chapitre était de montrer qu'il est possible d'établir les équations d'équilibre des modèles usuels de coques minces élastiques (ici de Novozhilov-Donnell et de membrane) à partir des équations d'équilibre de l'élasticité linéaire. Il est intéressant de remarquer que le modèle de Novozhilov-Donnell constitue une généralisation du modèle de Kirchhoff-Love

pour les coques peu courbées ou peu profondes (le modèle de Kirchhoff-Love est un cas particulier de celui de Novozhilov-Donnell pour une courbure nulle).

Cependant, compte tenu des contradictions entre les hypothèses cinématiques et statiques qui sont nécessaires pour obtenir les équations d'équilibre, et des hypothèses supplémentaires injectées pour obtenir les équations d'équilibre bidimensionnelles, il est difficile de préciser le domaine de validité des modèles de Novozhilov-Donnell et de membrane ainsi obtenus. Autrement dit, pour un ingénieur, quel modèle de coque utiliser en fonction des données du problème ? Comment justifier les hypothèses contradictoires sur lesquelles sont construits les modèles de coques ?

Il est possible de répondre à ces questions et de justifier rigoureusement les modèles usuels de coques minces élastiques, par développement asymptotique des équations de l'élasticité linéaire et même non linéaire. En procédant de la sorte, il est possible de construire une classification complète des modèles linéaires et non linéaires de coques minces élastiques en fonction des niveaux d'efforts exercés et de la géométrie de la surface moyenne, et d'en préciser clairement les domaines de validité. Cette approche permet également de construire de nouveaux modèles qui n'existent pas dans la littérature. On trouvera les principaux résultats obtenus en théorie des plaques et des coques élastiques dans [12][13][16]. Cette approche a également été étendue au cas des poutres voiles ou poutres à parois minces dans [14][15], et au cas des plaques élasto-plastiques dans [18].

Bibliographie

- [1] F. Béchet, E. Sanchez-Palencia, O. Millet : *Computing singular perturbations for linear elliptic shells*, *Computational Mechanics*, 42 : 287-304, 2008.
- [2] F. Béchet, E. Sanchez-Palencia, O. Millet : *Singular perturbations generating complexification phenomena for elliptic shells*, *Computational Mechanics*, 43 : 207-221, 2009.
- [3] F. Béchet, O. Millet, E. Sanchez-Palencia : *Adaptive and anisotropic mesh strategy for thin shell problems. Case of inhibited parabolic shells*, *International Journal of Solids and Structures*, 46 : 534-556, 2009.
- [4] F. Béchet, O. Millet, E. Sanchez-Palencia : *Limit behavior of Koiter model for long cylindrical shells and Vlassov model*, *International Journal of Solids and Structures*, 47 (2010) 365–373.
- [5] F. Béchet, E. Sanchez-Palencia, O. Millet : *Singularities in shell theory. Anisotropic error estimates and numerical simulations*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199, pp. 1326-1341, 2010.
- [6] J.Breuneval : *Elasticité - Sur l'énergie de déformation des coques minces élastiques*; C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967.
- [7] J.Breuneval : *Schéma d'une théorie générale des coques minces élastiques*; J. Mec. vol. 10, N°2, Juin 1971.
- [8] J.Breuneval : *Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*; Thèse d'état, Université de Provence, septembre 1972.
- [9] J. Breuneval : *Principe des travaux virtuels et équations des coques*; J.M., vol. 12, N°1, mars 1973, pp. 137 - 149.
- [10] P. Destuynder : *Modélisation des coques minces élastiques* , Masson, 1990.
- [11] A. Hamdouni, K. Elamri, C. Vallée, O. Millet : *Compatibility of large deformations in nonlinear shell theory*, *Eur. J. Mech., A/ Solids*, 17, p. 855-864, 1998.
- [12] A. Hamdouni, O. Millet : *Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part I : the shallow shells*, *Arch. Mech.*, vol. 55, n° 2, pp.135-175, 2003.
- [13] A. Hamdouni, O. Millet : *Classification of thin shell models deduced from the nonlinear three-dimensional elasticity. Part II : the strongly bent shells*, *Arch. Mech.*, vol. 55, n° 2, pp. 177-219, 2003.
- [14] A. Hamdouni, O. Millet : *An asymptotic non-linear model for thin-walled rods with strongly curved open cross-section*, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, (41) 396-416, 2006.

- [15] A. Hamdouni, O. Millet : *An asymptotic linear model for thin-walled rods with coupling between twist and bending*, International Applied Mechanics, vol. 46, issue 9, pp. 1072-1092, 2011.
- [16] O. Millet, A. Hamdouni, A. Cimetière : *A classification of thin plate models by asymptotic expansion of nonlinear three-dimensional equilibrium equations*, Int. J. of Non-Linear Mechanics, 36, pp. 165-186, 2001.
- [17] O. Millet, A. Hamdouni, A. Cimetière : *An eulerian approach of membrane theory for large displacements*, Int. J. of Non-Linear Mechanics, (38) pp.1403-1420, 2003.
- [18] O. Millet, A. Cimetière, A. Hamdouni : *An asymptotic elastic-plastic plate model for moderate displacements and strong strain hardening*, Eur. J. of Mech. A/ Solids, (22) pp. 369-384, 2003.
- [19] J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia : *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992.
- [20] J. Sanchez-Hubert et E. Sanchez-Palencia : *Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques*, Masson, 1997.
- [21] E. Sanchez-Palencia, O. Millet, F. Béchet. *Thin Elastic Shells. Computing and Asymptotics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 54, Springer, 2010 (295 pages). ISBN : 978-3-642-13814-0.
- [22] R. Valid : *La théorie linéaire des coques et son application aux calculs inélastiques*, Thèse d'Etat, Onera, 1973.
- [23] R. Valid : *Fondements de la théorie des coques : une présentation surfacique simple*, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol 7, N^o 2, 1988, p135-156.
- [24] R. Valid : *The nonlinear principles of complementary energy in shell theory, statics and dynamics. I. Statics*, Eur. J. Mech. A/Solids, 11, N^o5, 1992, p625,651.
- [25] R. Valid : *The Nonlinear Theory of Shells through Variational Principles*, John Wiley et Sons Ltd, 1995.