

# Analyse Asymptotique et perturbations singulières

## Introduction et fondements méthodologiques

Jacques Mauss.  
Professeur émérite  
Institut de Mécanique des fluides  
Université de Toulouse

### Pourquoi l'analyse asymptotique ?

Cette question ne se posait pas dans les années 1960 et puis, petit à petit, avec l'avènement des ordinateurs et la croissance de leur puissance de calcul, cette discipline, l'analyse asymptotique, pourtant miraculeuse par beaucoup d'aspects, eut tendance à disparaître des publications scientifiques. Elle revient en vogue parce que l'analyse fine des phénomènes est trop importante pour que l'on se contente, même dans les applications industrielles, de résultats numériques trop souvent difficiles à interpréter. Le mariage entre l'analyse numérique et l'analyse asymptotique fut certes difficile à ses débuts mais, avec le temps, c'est devenu un mariage heureux.

En fait, même si on ne s'en rend pas toujours compte, l'analyse asymptotique est toujours présente dès que les phénomènes physiques sont modélisés sous la forme de problèmes mathématiques.

Il est donc clair que l'exigence d'une rigueur mathématique totale ne peut être remplie sauf pour des problèmes assez simples pour que leur intérêt soit purement pédagogique. Le but d'un physicien, celui qui se propose de donner une description de la réalité, est d'obtenir une approximation plausible de la solution d'un problème mathématique censé modéliser un phénomène physique. Mais en même temps, on ne peut pas être assuré de la précision obtenue, cette qualité de la précision est en effet étroitement liée à la démonstration de l'existence d'une solution, démonstration hors de portée de la plupart des problèmes mathématiques posés par la physique.

On vient d'évoquer le fait que la science et la technique ne peuvent se développer sans l'analyse et sans les calculs. Mais l'assise est précaire, une bonne chaise repose sur au-moins trois pieds. Et pour nous, ce troisième pied, celui qui va définitivement assurer l'équilibre stable de l'ensemble, c'est la comparaison avec le réel, c'est l'expérience.

Voilà le trio gagnant, la modélisation mathématique, la simulation numérique et l'expérimentation. Déséquilibrer ce bel édifice, c'est oublier la quête séculaire de l'humanité, chercher, créer, comprendre.

Une critique importante que l'on peut faire à l'analyse asymptotique est le caractère trop souvent obscur et difficile des ouvrages, assez peu nombreux, qui lui sont consacrés, et ce divorce apparent avec les mathématiques. Certains pensent que sans théorèmes, il n'y a pas de mathématiques. Peut-être, mais cela n'exclut pas la rigueur mathématique.

Un autre aspect est lié aux nombreuses méthodes qui sont apparues au gré des problèmes posés et des disciplines concernées. C'est vrai, mais si l'on n'oublie pas les objectifs que l'on s'est fixés, on peut présenter l'analyse asymptotique et ses difficultés assez simplement. Par exemple, imaginons un modèle qui se réduise à l'équation

$$A + B\varepsilon = 0.$$

Pour l'instant  $A$  et  $B$  sont des constantes par rapport à  $\varepsilon$ , un petit paramètre que l'on peut « à priori » négliger pour le phénomène physique que l'on veut étudier.

Car c'est bien là l'objet de cette analyse. Que peut-on négliger dans un problème qui nous paraît insoluble pour essayer d'en trouver un modèle plus simple et peut-être résoluble avec les moyens dont on dispose. Donc,  $\varepsilon$  est supposé petit. On voit déjà la première objection que l'on peut faire. Que veut dire  $\varepsilon$  petit ?

Un nombre ne peut être considéré comme petit (ou grand) que s'il est sans dimension. Donc, pour modéliser un phénomène physique, il faut d'abord rendre le problème mathématique sans dimension. L'adimensionnalisation est une des premières tâches du physicien ou/et du mécanicien modélisateur.

Donc,  $\varepsilon$  est sans dimension et, pour le problème considéré, il est petit. Par conséquent, une 1<sup>ère</sup> approximation du phénomène  $A$  est donnée par,

$$A = A_0 = 0.$$

La première réflexion du néophyte est donc de dire que si  $A$  est petit en première approximation, comment peut-il être négligé devant le phénomène  $B\varepsilon$  ?

*C'est une confusion très habituelle entre le zéro asymptotique et le zéro numérique.*

On peut facilement y répondre en écrivant l'équation de départ sous la forme légèrement modifiée,

$$A + B\varepsilon = C.$$

La première approximation ne soulève alors aucune objection avec,

$$A = A_0 = C.$$

Pourtant, sur le fond, rien n'a changé. Voilà, dans le premier cas,  $C$  prend la valeur numérique zéro, et il n'est pas petit au sens asymptotique. Cette manière de voir est assez commode pour comprendre la suite. En effet, le phénomène  $A$  dépend de  $\varepsilon$  de sorte que, si on suppose que cette dépendance est analytique, ainsi que pour  $B$ , on peut écrire les développements,

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon^n, B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varepsilon^n.$$

Ce sont les Développements Asymptotiques (DA) les plus simples que l'on puisse construire. Du coup, chaque terme de l'inconnue  $A$  est déterminé de proche en proche pour  $n > 1$  par la relation,

$$A_n + B_{n-1} = 0.$$

Cette idée de développement asymptotique est particulièrement intéressante. On connaissait depuis longtemps les séries convergentes et aussi les séries divergentes.

Quel intérêt peut avoir une série qui diverge ?

Et bien, on peut répondre à cette question avec une remarque toute simple. Comme ces séries divergentes sont obtenues à partir de fonctions bien connues, il doit bien rester une trace de cette information dans celles-ci. Cette information est contenue nécessairement dans les premiers termes de la série. Il faut donc s'arrêter assez vite si on veut avoir une chance de conserver l'information sans qu'elle soit noyée dans la divergence de la série. Voilà pourquoi un DA est toujours limité et que l'on parle de développement et non de série.

Mais, il y a une bonne et une mauvaise nouvelle dans ces remarques.

La bonne nouvelle, c'est qu'un DA conduisant à une série divergente contient plus d'informations dans les premiers termes du développement qu'une série convergente. Ce fait a été vérifié maintes fois à posteriori.

Mais, la mauvaise nouvelle, c'est que l'on ne le sait jamais à priori. Pire, on connaît encore moins la précision des approximations calculées. C'est là que la confrontation avec l'expérience est importante.

# 1. Initiation aux problèmes asymptotiques.

Les problèmes mathématiques modélisant un ou des phénomènes physiques sont, le plus souvent, difficiles sinon impossibles à résoudre. Mais il peut apparaître des simplifications quand on se limite dans les domaines de calcul ou dans l'adimensionnalisation quand un ou plusieurs petits paramètres sont présents, signifiant que des phénomènes peuvent être négligeables par rapport à d'autres.

Limitons nous à un petit paramètre générique noté de façon symbolique par  $\varepsilon$ . Considérons alors un opérateur différentiel  $L_\varepsilon$  tel que l'on cherche la solution  $\phi(x, \varepsilon)$  où  $x$  est un variable appartenant à un domaine  $D$  et où  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0$  est un nombre positif aussi petit que souhaité. Le problème mathématique s'écrit sous la forme générale,

$$L_\varepsilon[\phi(x, \varepsilon)] = 0$$

Le problème réduit correspondant, à priori plus simple, s'écrit,

$$L_0[\phi_0(x)] = 0$$

En physique mathématique, il est important que l'on soit assuré que dans  $D$ , la norme  $\|\phi - \phi_0\|$  soit petite. Le plus souvent, mais ce n'est pas nécessaire, on utilise la norme de la convergence uniforme,

$$\text{Max}_D |\phi_\varepsilon - \phi_0| < K\delta(\varepsilon)$$

où  $K$  est un nombre positif indépendant de  $\varepsilon$  et où  $\delta$  est une fonction positive et continue telle que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$$

Les problèmes qui se présentent de cette façon sont des problèmes réguliers. On parle aussi de problèmes de perturbation régulière.

Il se peut qu'une singularité apparaisse de sorte que l'approximation  $\phi_0$  ne soit pas uniformément valable. La singularité se situe en général dans un domaine de dimension inférieure à celle de  $D$ . Les problèmes sont alors qualifiés de problèmes de perturbation singulière.

Pour illustrer une initiation à ces divers problèmes, nous allons nous attacher à des solutions  $\phi_\varepsilon$  connues ; les modèles qui vont suivre sont donc de nature pédagogique. Ils montrent quand même la plupart des difficultés conceptuelles auxquelles on peut être confronté et ils suggèrent les méthodes permettant de construire les solutions.

## 1.1 L'oscillateur linéaire.

L'oscillateur linéaire

$$m \frac{d^2 y^*}{dt^{*2}} + \beta \frac{dy^*}{dt^*} + ky^* = 0$$

est soumis aux conditions initiales

$$y^*|_{t^*=0} = 0 \quad m \left. \frac{dy^*}{dt^*} \right|_{t^*=0} = I_0$$

Dans ces expressions,  $y^*(t^*, m, \beta, k, I_0)$  est la position au cours du temps d'une masse  $m$  suspendue à un ressort de rigidité  $k$  et à un amortisseur de coefficient d'amortissement  $\beta$ . Cette masse est mise en mouvement à partir du repos par une impulsion  $I_0$ . On a donc un problème avec une variable et quatre paramètres dimensionnés.

Procédons à l'adimensionnalisation du problème en introduisant une longueur  $L$  et un temps  $T$  pour l'instant arbitraires. On pose,

$$y = \frac{y^*}{L} \quad t = \frac{t^*}{T}$$

On est donc conduit au problème,

$$\frac{m}{kT^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta}{kT} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

avec les conditions,

$$y|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{I_0 T}{mL}$$

Comme la cause du mouvement est l'impulsion, il est naturel d'en déduire le temps caractéristique,

$$T = \frac{mL}{I_0}$$

A ce stade, on voit apparaître dans l'équation deux nombres sans dimension,  $\frac{I_0^2}{mL^2k}$  et,  $\frac{\beta I_0}{mLk}$ ,

$$\frac{I_0^2}{mL^2k} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\beta I_0}{mLk} \frac{dy}{dt} + y = 0$$

avec les conditions,

$$y|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

Comme il reste à fixer la longueur caractéristique du problème, on a deux choix possibles,

$$L = \frac{I_0}{\sqrt{mk}} \quad L = \frac{\beta I_0}{mk}$$

Si les deux nombres sans dimension ainsi déterminés sont du même ordre, le problème n'est simplifié que dans sa présentation. Le problème mathématique ne peut pas être simplifié. En revanche, s'ils sont très différents l'un de l'autre, le problème peut être simplifié et deux cas se présentent.

$$1) \text{ Supposons } \frac{\beta I_0}{mLk} \ll \frac{I_0^2}{mL^2k}$$

Avec le premier choix pour  $L = \frac{I_0}{\sqrt{mk}}$ , on peut définir un petit paramètre avec,

$\varepsilon = \frac{\beta}{2\sqrt{mk}}$  qui signifie que, physiquement, l'action du ressort est prépondérante devant celle de l'amortisseur et l'équation s'écrit,

$$L_\varepsilon[y(t, \varepsilon)] = \frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0$$

2) Supposons  $\frac{\beta I_0}{mLk} \gg \frac{I_0^2}{mL^2k}$

C'est le second choix qui s'impose pour la longueur caractéristique  $L = \frac{\beta I_0}{mk}$ . Là encore, on peut définir un petit paramètre  $\varepsilon = \frac{mk}{\beta^2}$  signifiant que l'influence de l'amortisseur est prépondérante. L'équation s'écrit,

$$L_\varepsilon[y(t, \varepsilon)] = \varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0$$

Dans le premier cas, le problème réduit, obtenu formellement avec  $\varepsilon = 0$ , s'écrit de façon plus simple,

$$L_0[y_0(t)] = \frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0$$

Pour ces deux problèmes, on est donc tenté de simplifier le problème initial en négligeant le petit paramètre  $\varepsilon$ . On est donc conduit à deux problèmes de nature différente puisque dans le premier cas on conserve une équation du second ordre alors que dans le second cas, le problème se réduit à une équation du premier ordre avec deux conditions aux limites.

Dans ce dernier cas qui fera l'objet de toute notre attention, il y a une perturbation singulière quasi garantie. En effet, le problème réduit est du premier ordre,

$$L_0[y_0(t)] = \frac{dy_0}{dt} + y_0 = 0$$

Indépendamment de ce fait capital, et pour conclure ces remarques, il apparaît trois raisons pour écrire le problème sous forme adimensionnelle.

La première est d'identifier le problème mathématique qui modélise le problème physique en définissant les nombres sans dimension caractéristiques et donc, d'en espérer une solution plus simple.

La seconde est, justement à travers ces nombres caractéristiques, de condenser les résultats et de les présenter aux analystes sous une forme réduite.

Enfin, toujours grâce à ces nombres sans dimension, d'élaborer une théorie des maquettes permettant l'expérimentation.

Il est à noter que même si les deux longueurs caractéristiques sont comparables, et bien que le problème mathématique ne soit pas simplifiable en un problème réduit, on peut utiliser cette adimensionnalisation pour les deux dernières raisons signalées, construire des maquettes et présenter les résultats expérimentaux ou numériques sous formes d'abaques, ce qui est loin d'être négligeable pour le chercheur ou l'ingénieur.

## 1.2 Les problèmes réguliers.

Considérons donc le problème, apparemment régulier défini par l'équation et les conditions aux limites,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad y|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

On peut envisager sans trop y réfléchir, un développement analogue au développement de Taylor, sous la forme,

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

Les petits points signifient simplement que les termes négligés sont d'un ordre de grandeur plus petit que  $\varepsilon^2$  ; cette terminologie sera formalisée plus loin. Ce type de développement trouve sa justification avec Poincaré, c'est pourquoi on leur donne ce nom. Substituant ce développement dans l'équation et dans les conditions aux limites, on trouve les problèmes successifs,

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = 0, \quad y_0|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{dy_0}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + y_1 = -2 \frac{dy_0}{dt}, \quad y_1|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{dy_1}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Le premier problème, qu'on appelle souvent le problème réduit, donne la solution sans amortissement

$$y_0 = \sin t.$$

Le second problème apporte un correctif donné par

$$y_1 = -t \sin t,$$

de sorte qu'une approximation de la solution s'écrit,

$$y = (1 - \varepsilon t) \sin t + \dots$$

On observe que sur tout intervalle de temps borné indépendamment de  $\varepsilon$ , la correction restant petite, l'approximation est uniformément valable et le problème est bien régulier. Le choix de conditions initiales plutôt que de conditions aux limites n'est donc pas innocent dans cette initiation. En effet, on observe que pour des intervalles de « temps » assez grands, on introduit une perturbation singulière dans le DA ; ce type de problème est qualifié de problème séculaire. Cette terminologie est issue de l'étude de la trajectoire des planètes où l'on retrouve, est-ce une coïncidence, le nom de Poincaré.

Pour ce problème, évidemment pédagogique, la comparaison avec la solution exacte est éclairante ; on a,

$$y(t, \varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin t \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Sur cette solution, le DA est facile à mettre en œuvre et l'on retrouve aisément les deux premières approximations précédentes, la première étant qualifiée de « premier ordre », la seconde de « second ordre ».

### 1.3 Les problèmes singuliers.

Un problème singulier est typiquement celui donné par le deuxième cas de l'oscillateur linéaire mais, pour des raisons historiques, nous utiliserons plutôt le célèbre modèle de Friedrichs [1] donné par,

$$L_\varepsilon[y(x, \varepsilon)] = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - a = 0 \quad \text{avec } y|_{x=0} = 0 \text{ et } y|_{x=1} = 1$$

On suppose que  $0 < a < 1$  et l'on recherche la solution dans l'ouvert  $0 < x < 1$ . Généralement, les problèmes avec des conditions initiales sont mathématiquement plus faciles à traiter que ce type de problème avec des conditions aux limites. Le problème réduit s'écrit,

$$L_0[y_0(x)] = \frac{dy_0}{dx} - a = 0$$

dont la solution est donnée par,

$$y_0 = ax + A.$$

Pour déterminer la constante  $A$ , on dispose de deux conditions aux limites. Cette situation est caractéristique de beaucoup de problèmes singuliers ; l'équation réduite est d'un ordre inférieur à l'équation initiale.

Si l'on vérifie la condition à l'origine, on a  $y_0 = ax$ . Par contre, en vérifiant la condition en  $x = 1$ , on obtient  $y_0 = ax + 1 - a$ .

Laquelle choisir est un problème clé des problèmes singuliers. Et d'ailleurs, on peut même se poser la question : faut-il choisir une de ces conditions ?

Bon, ce problème pédagogique a une solution,

$$y(x, \varepsilon) = ax + (1 - a) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

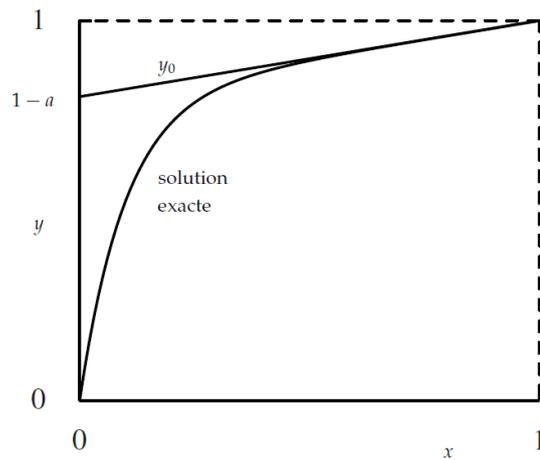
Dès que  $x > 0$ , on voit qu'avec une bonne approximation, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a,

$$y = ax + 1 - a + \dots$$

Il ya donc une zone de non uniformité au voisinage de l'origine, une couche limite, dont l'étude nécessite une autre approche. Trouver cette approximation a nécessité un processus limite,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = y_0(x) = ax + 1 - a$$

Insistons sur le fait que cette solution n'est pas valable au voisinage de l'origine. Sur la figure qui suit, on voit comment cette approximation chute au voisinage de l'origine.



En examinant la solution exacte, il apparaît qu'un autre processus limite peut être envisagé. Si l'on pose

$$X = \frac{x}{\varepsilon}$$

La fonction s'écrit,

$$y(x, \varepsilon) = a\varepsilon X + (1 - a) \frac{1 - e^{-X}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

et, étant entendu que  $X$  est fixé, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = Y_0(X) = (1 - a)(1 - e^{-X})$$

On observe que la condition à l'origine est cette fois bien vérifiée mais pas celle en  $x = 1$ . On note ainsi que la variable  $X$  décrit mieux le voisinage de l'origine mais qu'il ne faut pas s'en éloigner trop. Bref,  $y_0$  est une approximation de la solution en dehors de l'origine alors que  $Y_0$  l'est au voisinage de cette origine.

Une autre remarque plutôt étonnante montre un lien entre ces deux approximations, lequel est donné par,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} Y_0(X) = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = 1 - a$$

Ces remarques ont pu être faites parce que l'on connaissait la solution exacte. Le problème que nous avons à résoudre, c'est de savoir comment s'y prendre quand on ne connaît pas cette solution. Les idées essentielles sont apparues après l'année 1950, date de la publication de Friedrichs. De nombreuses méthodes ont été mises en œuvre pour répondre à cette question. Parmi les auteurs concernés, citons Lagerstrom [2], Cole [3], Van Dyke [4] et Eckhaus [5,6]. La plus célèbre et la plus utilisée est la méthode des développements asymptotiques raccordés, particulièrement pour les équations régissant les écoulements de fluides visqueux. Voyons comment elle se présente.

### 1.3 La Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (MDAR).

Développons cette méthode en utilisant le modèle de Friedrichs et en faisant semblant d'ignorer la solution exacte.

**La première étape** nous donne la solution du problème réduit,  $y_0 = ax + A$ .

D'une façon générale, on n'est pas assuré qu'il faut choisir l'une des conditions aux limites pour déterminer la constante A. Pour répondre à cette question, il faut connaître le problème physique modélisé. Par exemple, pour des fluides visqueux à grands nombres de Reynolds, on sait que des couches limites se développent au voisinage des parois. Bref, admettons que la zone de non-uniformité est connue. Pour le problème traité, elle est en  $x = 0$  et, la solution du problème réduit est donc,

$$y_0(x) = ax + 1 - a .$$

**La deuxième étape** consiste à examiner le voisinage de l'origine. Pour cela, on utilise un microscope mathématique ; on pose  $X_\alpha = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}$  où  $\alpha$  est un nombre strictement positif. Du coup, si l'on veut que  $X_\alpha$  reste proche de 1, il faut que  $x$  soit proche de  $\varepsilon^\alpha$ , donc proche de l'origine. Il faut maintenant ajuster le microscope, c'est-à-dire, trouver la valeur de  $\alpha$ . Pour cela, on examine l'équation en posant  $Y_\alpha(X, \varepsilon) \equiv y(x, \varepsilon)$ .

On obtient,

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 Y_\alpha}{dX_\alpha^2} + \varepsilon^{-\alpha} \frac{dY_\alpha}{dX_\alpha} = a$$

Comme il faut impérativement retenir la dérivée seconde, le choix optimal est donc  $\alpha = 1$ . Si l'on pose  $X_\alpha = X$  et  $Y_\alpha = Y$ , on obtient une réécriture de l'équation donnée par,

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + \frac{dY}{dX} = \varepsilon a$$

**La troisième étape** consiste à résoudre le problème réduit correspondant. On a l'équation,

$$\frac{d^2 Y_0}{dX^2} + \frac{dY_0}{dX} = 0$$

dont la solution doit nécessairement vérifier la condition à l'origine. On a donc,

$$Y_0(X) = A(1 - e^{-X})$$

Il y a quelque chose de nouveau, c'est que l'on peut croire que l'autre condition peut aussi être vérifiée. Le résultat obtenu est faux parce que le domaine de variation de la variable  $X$  est grand et, à l'image des problèmes séculaires, l'ordre de l'équation est conservé mais l'on quand même un problème de perturbation singulière.

En réalité, de même que l'on sait que  $y_0(x)$  n'est pas une approximation valable au voisinage de l'origine,  $Y_0(X)$  n'est pas une approximation valable en dehors de l'origine.

**La quatrième étape** est la clé de la méthode. Il faut trouver la condition manquante pour déterminer A. Une idée qui vient naturellement à l'esprit est de dire qu'il doit y avoir une zone

de recouvrement dans laquelle les comportements respectifs de  $y_0$  et  $Y_0$  doivent s'identifier. Cette zone intermédiaire peut être formalisée avec la variable,

$$x_\beta = \frac{x}{\varepsilon^\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

On obtient,

$$y_0(x) = 1 - a + a\varepsilon^\beta x_\beta = 1 - a + \dots$$

$$Y_0(X) = A \left[ 1 - \exp\left(-\frac{x_\beta}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) \right] = A + \dots$$

On voit bien que si  $x_\beta$  est fixé et que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $A = 1 - a$ .

Cette technique de raccord est qualifiée du terme « raccord intermédiaire »

Une autre façon consiste à prendre directement les limites et d'écrire, comme on en a fait la remarque plus haut,

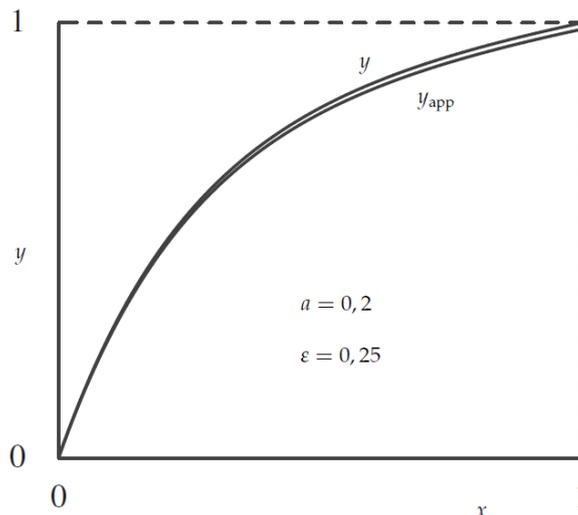
$$\lim_{X \rightarrow \infty} Y_0(X) = \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = 1 - a$$

On retrouve bien la valeur de A mais, il faut pour cela que les limites existent. Cette méthode est qualifiée du terme, « principe du raccord asymptotique »

**La cinquième étape**, si on le souhaite, est de construire une Approximation Uniformément Valable (AUV)  $y_{ap}$  en additionnant les deux approximations et en retranchant la partie commune. On obtient,

$$y_{ap} = y_0(x) + Y_0(X) - (1 - a) = ax + (1 - a)(1 - e^{-X})$$

Sur la figure, on montre la solution exacte et cette dernière approximation, appelée solution composite, pour  $a = 0.2$  et  $\varepsilon = 0.25$ .



Les réflexions précédentes constituent les idées de base qui vont permettre de construire la célèbre Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (MDAR) d'une façon plus formelle.

## 1.4 La Méthode des Approximations Successives Complémentaire (MASC).

Une méthode assez ancienne, voir O'Malley [7], consiste à rechercher d'emblée une AUV de la solution du problème. En effet, dans le modèle de Friedrichs, en admettant que l'on connaisse  $y_0(x)$ , on peut chercher cette approximation sous la forme,

$$y_{a1} = y_0(x) + Y_0^*(X)$$

L'équation de Friedrichs s'écrit,

$$L_\varepsilon[y(x, \varepsilon)] = \varepsilon \frac{d^2 y_0}{dx^2} + \frac{dy_0}{dx} - a + \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{d^2 Y_0^*}{dX^2} + \frac{dY_0^*}{dX} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{d^2 Y_0^*}{dX^2} + \frac{dY_0^*}{dX} \right]$$

Ce résultat est très particulier car le terme  $\frac{d^2 y_0}{dx^2}$  est nul, ce qui n'arrive jamais dans des cas réalistes. En fait, ceci veut dire que si l'on applique exactement les conditions aux limites, on doit retrouver la solution exacte. En effet, on obtient,

$$Y_0^*(X) = A + B e^{-X} \text{ avec } Y_0^*(0) = a - 1 \text{ et } Y_0^*\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0$$

Si l'on rappelle que  $y_0(x) = ax + 1 - a$ , on trouve la solution exacte avec,

$$Y_0^*(X) = (1 - a) \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-X}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

L'approche précédente n'est ni habituelle ni traditionnelle parce que  $Y_0^*(X)$  dépend de  $\varepsilon$ . Mais, sur cet exemple modèle, on voit bien la puissance de l'analyse qui, en même temps, n'a nul besoin du raccord asymptotique. Le fait d'accepter cette dépendance dans l'approximation avec  $\varepsilon$  est un fait nouveau et conduit cette fois, comme on le verra plus loin, à une nouvelle méthode.

La méthode classique conduit à écrire

$$Y_0^*(X) = (a - 1)e^{-X}$$

ce qui néglige de fait un terme très petit, et qui donne l'approximation déjà obtenue par la MDAR,

$$y_{ap} = y_{a1} = ax + (1 - a)(1 - e^{-X})$$

En fait, on peut démontrer [8] que si l'on exige l'indépendance des fonctions par rapport à  $\varepsilon$ , la MASC, que l'on qualifiera de régulière, est équivalente à la MDAR. Dans l'écriture des approximations, on voit apparaître deux échelles différentes,  $x$  et  $X$ . La méthode peut alors s'apparenter à une méthode de double échelle dont nous allons aborder maintenant une brève description.

## 1.6 La Méthode des échelles multiples.

L'idée de la méthode date des années 1960 où elle fut proposée sous diverses formes. Quand on examine le modèle de Friedrichs, on voit bien que deux variables sont nécessaires pour obtenir une AUV. A la différence de la MASC, on ne suppose pas connue explicitement la structure de l'AUV mais, on pose,

$$y(x, \varepsilon) \equiv Y(x, X, \varepsilon)$$

où les deux variables  $x$  et  $X$  sont considérées indépendantes. L'équation modèle initiale, l'équation de Friedrichs, devient une équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + \frac{\partial Y}{\partial X} + \varepsilon \left( 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x} - a \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0$$

La fonction  $Y$  étant, cette fois, définie sur le rectangle

$$0 < x < 1, 0 < X < \frac{1}{\varepsilon}$$

Les conditions aux limites sont insuffisantes pour trouver une solution au problème posé. Admettant que la solution est assez régulière pour rechercher une approximation de celle-ci sous la forme,

$$Y(x, X, \varepsilon) = Y_0(x, X) + \varepsilon Y_1(x, X) + \dots$$

Une itération formelle sur l'équation conduit aux deux problèmes,

$$1) \quad \frac{\partial^2 Y_0}{\partial X^2} + \frac{\partial Y_0}{\partial X} = 0 \text{ avec les conditions, } Y_0(0,0) = 0 \text{ et } Y_0(1, \infty) = 1$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} = a - \left( 2 \frac{\partial^2 Y_0}{\partial X \partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial x} \right)$$

La solution du premier problème ne peut évidemment pas être complètement déterminée. On a en effet,

$$Y_0(x, X) = A(x) + B(x)e^{-X}$$

avec les conditions,

$$A(0) + B(0) = 0, \quad A(1) = 1$$

C'est une manière assez classique d'opérer dans ces méthodes que de regarder la structure du second ordre. Ici, on a,

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} = a - \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} e^{-X}$$

Ceci permet d'écrire la solution générale de ce dernier problème sous la forme,

$$Y_1(x, X) = C(x) + D(x)e^{-X} + X \left( a - \frac{dA}{dx} \right) - \frac{dB}{dx} X e^{-X}$$

On exige alors que chaque terme du second ordre ne puisse être plus singulier qu'un terme du premier ordre. Ceci impose les équations différentielles,

$$a - \frac{dA}{dx} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = 0$$

Ces équations, compte tenu des conditions aux limites, ont des solutions très simples,

$$A(x) = ax + 1 - a, \quad B(x) = a - 1$$

La première approximation s'écrit donc,

$$Y_0(x, X) = ax + (1 - a)(1 - e^{-X})$$

Cette approximation n'est autre que celle déjà obtenue avec les méthodes précédentes.

## 1.7 La Méthode de Poincaré-Lighthill.

Cette méthode a des racines plus anciennes puisque c'est Poincaré lui-même qui l'a initiée en 1892. Néanmoins, le premier article important l'utilisant est dû à Lighthill en 1949.

Un peu plus tard, en 1953 et 1956, Kuo publie deux articles l'appliquant à des écoulements de fluides visqueux. Cette même année 1956, Tsien, dans un article de synthèse, qualifie la méthode de l'acronyme PLK. Mais, les auteurs anglo-saxons, malgré la présence de Lighthill l'appellèrent la méthode des coordonnées forcées (Strained coordinates method) : réalisme où nationalisation de la science, peu importe. En hommage à un grand mathématicien et à un grand mécanicien des fluides, nous l'appellerons « méthode PL »

Considérons le problème,

$$L_\varepsilon y = (x + \varepsilon y) \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{avec, } y|_{x=1} = 1$$

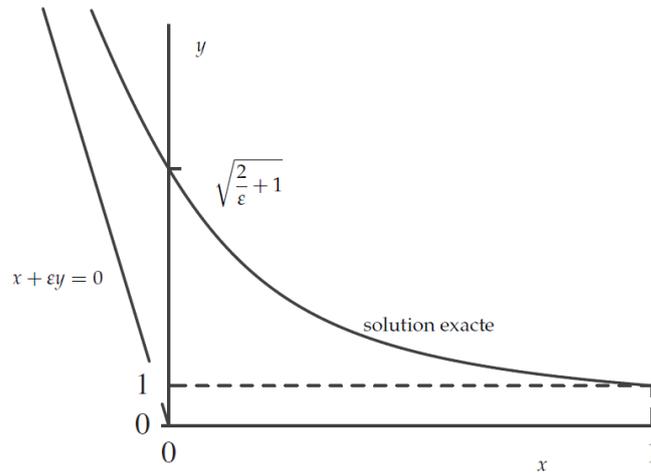
On recherche la solution sur l'intervalle  $0 < x < 1$ .

La solution exacte montre bien la nature de la singularité,

$$y(x, \varepsilon) = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

On voit bien que pour  $x = 0$  et  $\varepsilon > 0$ , la solution reste bornée alors qu'elle est singulière sur la ligne  $x + \varepsilon y = 0$ . Le transfert de cette singularité en  $x = 0$  ne fait qu'aggraver celle-ci. L'idée de la méthode est d'affirmer que le développement direct a la bonne forme mais pas au bon endroit. On développe alors  $y$  et  $x$  par rapport à  $\varepsilon$  naturellement mais aussi par rapport à un nouveau paramètre  $s$  proche de  $x$ .

On force légèrement la variable  $x$ , d'où le nom anglo-saxon de la méthode.



Plus précisément, on écrit,

$$y(x, \varepsilon) = y_0(s) + \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \dots$$

$$x(s, \varepsilon) = s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \dots$$

En remplaçant dans l'équation et en égalant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient facilement les deux premières équations,

$$1) \quad s \frac{dy_0}{ds} + y_0 = 0 \quad \text{avec,} \quad y_0|_{s=1} = 1$$

$$2) \quad s \frac{dy_1}{ds} + y_1 = \frac{dy_0}{ds} \left( s \frac{dx_1}{ds} - x_1 - y_0 \right)$$

Pour la première équation, la solution est simple, on a  $y_0(s) = \frac{1}{s}$  et, c'est la même forme que le développement direct. La seconde équation peut s'écrire,

$$\frac{d}{ds}(s y_1) = \frac{1}{s^2} \left( x_1 + \frac{1}{s} - s \frac{dx_1}{ds} \right)$$

dont la solution générale est,  $y_1(s) = \frac{A}{s} - \frac{1}{s^2} \left[ x_1(s) + \frac{1}{2s} \right]$  où  $A$  est une constante inconnue.

Le principe de la méthode PL est le suivant : *les approximations d'ordre supérieur ne doivent pas être plus singulières que la première approximation.*

La fonction inconnue  $x_1(s)$  doit donc vérifier le fait que,

$$\frac{1}{s} \left[ x_1(s) + \frac{1}{2s} \right] = B(s),$$

où  $B(s)$  est une fonction bornée. C'est caractéristique de cette méthode, l'inconnue n'est pas complètement déterminée et l'on peut choisir toute fonction bornée. Une meilleure précision est évidemment obtenue en annulant  $y_1$ , c'est-à-dire en prenant  $B(s) = A$ . Du coup, comme on a,

$$x_1(s) = As - \frac{1}{2s},$$

on vérifie plus précisément la condition en  $x = 1$  avec  $A = \frac{1}{2}$ . D'où,

$$x_1(s) = \frac{1}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right),$$

Les développements précédents prennent la forme,

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{s} + \dots$$

$$x(s, \varepsilon) = s + \frac{\varepsilon}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) + \dots$$

Il est plutôt amusant de constater que l'élimination de  $s$  dans ces deux expressions donne la solution exacte.

## 1.8 La Méthode du groupe de renormalisation.

Cette méthode dite du groupe de renormalisation s'applique essentiellement à des problèmes oscillatoires. Elle est encore à préciser sur le plan mathématique mais, son application en mécanique quantique a donné deux prix Nobel, l'un en 1999 l'autre en 2004.

L'idée générale est de se donner une certaine liberté sur les constantes d'intégration pour éliminer d'éventuelles singularités ultérieures ou pour accélérer la convergence du DA. On se contente ici à titre d'exemple du problème séculaire le plus simple,

$$L_\varepsilon[y(t, \varepsilon)] = \frac{dy}{dt} + \varepsilon y = 0$$

La solution directe contient une singularité au second ordre dès que  $t$  est grand. Le DA que l'on peut qualifier de « naïf » s'écrit,

$$y(t, \varepsilon) = A_0 [1 - \varepsilon(t - t_0)] + \dots$$

où  $A_0$  et  $t_0$  sont deux constantes qui doivent être précisées par la condition initiale. Pour se donner une certaine liberté, on pose,

$$A_0 = [1 + \varepsilon a(t_0, \mu)] A(\mu)$$

où  $A$  est la partie renormalisée de  $A_0$ ,  $a$  une fonction inconnue et  $\mu$  étant un temps arbitraire. Réécrivant  $y$ , on obtient, en négligeant des termes  $O(\varepsilon^2)$ ,

$$y = A(\mu) [1 + \varepsilon a(t_0, \mu) - \varepsilon(t - \mu) - \varepsilon(\mu - t_0)] + \dots$$

En posant  $a = \mu - t_0$ , on élimine la partie divergente due à  $t_0$ . On obtient ainsi la même expression que le développement direct, mais elle n'est plus aussi naïve,

$$y(t, \varepsilon) = A(\mu) [1 - \varepsilon(t - \mu)] + \dots$$

Cette fois,  $\mu$  est arbitraire. Le choix de  $A$  s'effectue avec le critère de renormalisation qui affirme que,

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = 0$$

On est donc conduit à l'optimisation de  $A$  par l'équation différentielle qui se réduit, en première approximation, à l'équation ;

$$\frac{dA}{d\mu} + \varepsilon A = 0$$

La solution est donnée pour  $\mu = t$  par,

$$y(t, \varepsilon) = A_1 e^{-\varepsilon t} + \dots$$

Cette première approximation n'est autre que la solution exacte. Il est vrai que l'on a fait semblant de ne pas savoir résoudre le problème initial alors que l'on n'a pas hésité pour trouver  $A$ . Le fait qu'il s'agisse de la même équation est une coïncidence due à la simplicité pédagogique du modèle de départ.

## 1.8 Conclusion.

Il y a encore bien d'autres méthodes pour tenter de trouver des approximations aux solutions (inconnues) de problèmes de perturbation singulière.

En dehors des problèmes oscillatoires, périodiques ou quasi-périodiques qui nécessitent des analyses spécifiques, toutes les méthodes sont en pratique issues des exemples pédagogiques précédents.

Il est vrai que le développement de l'analyse numérique lié à la puissance des ordinateurs modernes a peu à peu donné l'impression que ces méthodes, plutôt délicates à mettre en œuvre, n'avaient plus leur utilité historique. Les méthodes numériques, dites de simulation directe, se sont révélées tellement puissantes que l'analyse asymptotique est apparue comme inutile.

Jusqu'à maintenant.

En effet, au moment où la physique, disons macroscopique, pour ne pas parler de mécanique quantique, s'est lancée dans une modélisation de plus en plus sophistiquée, l'analyse fine des phénomènes et leur compréhension devient ou redevient d'une grande actualité.

La complexité des interactions, leur caractère tridimensionnel et leur variabilité dans le temps font que, juste retour des choses, l'analyse asymptotique est redevenue une nécessité pour l'analyse numérique elle-même. L'outil et la réflexion sont indissociables comme le sont la science et la technique et pourtant, on le sait bien, ce ne fut pas toujours le cas.

## 2. Les développements asymptotiques.

Ces quelques pages sont destinées à la définition minimale des outils mathématiques essentiels à l'écriture d'un formalisme asymptotique. L'approfondissement de ces questions peut se faire, par exemple, à l'aide des travaux d'Eckhaus [5,6].

### 2.1 Les fonctions d'ordre.

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions réelles  $\delta(\varepsilon)$  de la variable  $\varepsilon$ , strictement positives et continues sur l'intervalle semi-ouvert  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  telles que,

$$1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) \text{ existe au sens large,}$$

$$2) \forall \delta_1 \in E, \forall \delta_2 \in E, \delta_1 \delta_2 \in E.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction d'ordre, la seconde condition définissant une loi interne sur l'ensemble. Ces deux conditions excluent des fonctions contenant des oscillations telles que  $\varepsilon^n [1 + \sin^2(1/\varepsilon)]$ .

Pour comparer des fonctions d'ordre, on utilise souvent la notation dite de Hardy :

$$1) \delta_1 \ll \delta_2,$$

et l'on dit que  $\delta_1$  est asymptotiquement plus petit ou égal à  $\delta_2$  si  $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  est borné quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$2) \delta_1 < \delta_2,$$

et l'on dit que  $\delta_1$  est asymptotiquement plus petit que  $\delta_2$  si  $\frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$3) \delta_1 \approx \delta_2,$$

et l'on dit que  $\delta_1$  est asymptotiquement égal à  $\delta_2$  si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{\delta_2} = \lambda$  où  $\lambda$  est une constante finie non nulle. Si  $\lambda = 1$ , on utilise la notation  $\delta_1 \cong \delta_2$ .

Ainsi, on a  $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$  mais aussi,  $\varepsilon^2 < \varepsilon$ . De même,  $\varepsilon \ll \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \approx \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \cong \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ .

Notons que dans cet ensemble  $E$ , grâce à cette loi interne, on a un ordre total. En effet, soit  $R$  la relation définie par

$$R(\delta_1, \delta_2): \delta_1 \approx \delta_2 \text{ ou } \delta_1 \ll \delta_2.$$

Cette relation étant réflexive, transitive et antisymétrique, elle définit bien un ordre total. Le contre-exemple est donné par  $\delta_1 = \varepsilon$  et  $\delta_2^* = \varepsilon[1 + \sin^2(1/\varepsilon)]$ ; on a  $\delta_1 \ll \delta_2^*$  et  $\delta_2^* \ll \delta_1$  et pourtant  $\delta_1 \not\approx \delta_2^*$ .

On peut ainsi comparer deux fonctions d'ordre entre elles, exactement comme avec des nombres.

Soit  $\varphi(x, \varepsilon)$  une fonction définie dans un domaine  $D \times (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ ; on note  $\|\varphi\|$  une norme sur  $D$ . La notation dite de Landau est ainsi définie :

$$1) \varphi = O(\delta),$$

et l'on dit que  $\varphi$  est de l'ordre de  $\delta$ , si il existe une constante  $K$  telle que,

$$\|\varphi\| \leq K\delta.$$

$$2) \varphi = o(\delta),$$

et l'on dit que  $\varphi$  est beaucoup plus petit que  $\delta$  si,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\varphi\|}{\delta} = 0.$$

$$3) \varphi = O_S(\delta),$$

et l'on dit que  $\varphi$  est de l'ordre strict de  $\delta$ , si il existe une constante  $K$  non nulle telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\varphi\|}{\delta} = K.$$

Ces notations ne sont pas complètement standardisées. Ainsi, si  $\|\varphi\|$  est une fonction d'ordre, il y a équivalence entre les deux notations de sorte qu'il arrive souvent que, même si ce n'est pas le cas, elles soient tout de même confondues. La notation de Landau est plus générale que celle de Hardy dans la mesure où des fonctions oscillantes peuvent être jaugées; ainsi  $\sin \frac{1}{\varepsilon} = O(1)$ .

Dans la suite, compte tenu des applications envisagées, on utilise la norme de la convergence uniforme. Si l'on admet que  $\varphi$  est une fonction continue et bornée sur son domaine de définition, on a :

$$\|\varphi\| = \text{Max}_D |\varphi|$$

D'autres normes ont été utilisées, mais les ordres de grandeurs peuvent être complètement différents. Ainsi, considérant la fonction  $\varphi = \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$  avec  $D = [0,1]$ , on voit que, avec la norme de la convergence uniforme, on a  $\|\varphi\| = O_S(1)$  alors que on peut aussi bien obtenir  $\|\varphi\| = O_S(\sqrt{\varepsilon})$  pour une norme telle que celle de  $L_2$ ,

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_D \varphi^2 dx}$$

Notons que, dans l'ensemble  $E$ , la relation  $\delta_1 \approx \delta_2$  est une relation d'équivalence; elle est en effet symétrique, réflexive et transitive. On peut donc définir l'ensemble quotient  $\bar{E}$  des classes d'équivalence. En fait, quand on veut évaluer l'ordre de grandeur d'une fonction, le

choix du représentant de la classe peut être important. Le plus souvent ce sera une affaire de logique voire de simplicité. Ce choix étant fait, la fonction d'ordre correspondante peut prendre un nom particulier, par exemple, fonction de jauge. Toutefois ceci n'a rien d'impératif dans notre démarche. Là encore, comme pour les notations de Landau et de Hardy, dans la littérature, chacun donne ses définitions avec plus ou moins de clarté et de précision.

## 2.2 Les Développements Asymptotiques (DA).

D'une façon générale, un DA s'écrit sous la forme,

$$\varphi(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x, \varepsilon) + o[\delta_m(\varepsilon)]$$

où  $\delta_n$  est une suite asymptotique :

$$\forall n, \delta_{n+1} < \delta_n \text{ et où } \varphi_n = O_S(1).$$

Comme il n'y a pas unicité dans la construction d'un tel DA, on ne dit pas, comme trop souvent, que l'on a construit un DA à  $n$  termes, le nombre de termes n'étant pas significatif. Il vaut mieux dire que l'on a construit un DA à l'ordre  $\delta_m$ .

Pour que  $\sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x, \varepsilon)$  soit une approximation asymptotique intéressante de  $\varphi$ , il faut qu'en un certain sens, ce soit une fonction plus simple que  $\varphi$ . Mais la simplicité ne se définit pas aussi simplement.

Une manière particulièrement élégante de le faire est de construire un DA régulier donné par,

$$\varphi(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x) + o[\delta_m(\varepsilon)]$$

Dans ce cas seulement, on pourra aussi noter,

$$E^{(m)}\varphi = \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \varphi_n(x)$$

de sorte que,

$$\varphi(x, \varepsilon) = E^{(m)}\varphi + o[\delta_m(\varepsilon)]$$

Pour ces DA réguliers, on a la propriété constructive,

$$\forall h < m, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, \varepsilon) - \sum_{i=1}^h \delta_i(\varepsilon) \varphi_i(x)}{\delta_{h+1}} = \varphi_{h+1}(x)$$

On est tellement habitué qu'un DA soit toujours de cette forme que l'on oublie le terme additif « régulier » signifiant que ce DA est une forme particulière d'une forme générale. C'est d'ailleurs pour ne pas l'oublier que la forme la plus générale est qualifiée de DA généralisé.

A propos des fonctions de jauge et de l'unicité des DA, un exemple vaut mieux que toutes les généralités. Considérons la fonction,

$$\varphi(x, \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} x\right)^{-1}$$

On peut construire deux DA réguliers très différents,

$$\varphi(x, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) x^n + o[\delta_m(\varepsilon)] \quad \text{avec,} \quad \delta_n(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n$$

$$\varphi(x, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^m \varepsilon^n x(x-1)^{n-1} + o[\varepsilon^m]$$

Ceci montre qu'il est difficile de parler d'unicité pour un DA si la suite asymptotique de fonctions de jauge dans l'ensemble des fonctions d'ordre n'a pas été fixée.

Prenons, pour conclure, l'exemple simple de la fonction  $\sin 2\varepsilon$  ; on a successivement,

$$\sin 2\varepsilon = 2\varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \frac{4}{15}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7)$$

$$\sin 2\varepsilon = 2 \operatorname{tg} \varepsilon - 2 \operatorname{tg}^3 \varepsilon - 2 \operatorname{tg}^5 \varepsilon + O(\varepsilon^7)$$

$$\sin 2\varepsilon = 6 \frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2} - \frac{756}{5} \left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^5 + O(\varepsilon^7)$$

Si les deux premières approximations se ressemblent formellement, il n'en est pas de même de la dernière qui est bien meilleure. Le choix du petit paramètre, ici  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}$  est donc essentiel pour accélérer la convergence.

### 2.3 Remarques sur la convergence et la précision.

Pour une fonction suffisamment régulière, l'exemple le plus connu de DA est le développement de Taylor que l'on peut écrire,

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + \dots + \varepsilon^m \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + o(\varepsilon^m)$$

Si la fonction est analytique, on peut considérer un nombre de termes infini. On obtient une série qui peut être convergente ou divergente. Cette question fut longtemps difficile à comprendre. On a longtemps pensé jusqu'au début du 20<sup>ème</sup> siècle que les séries divergentes n'avaient aucun intérêt jusqu'aux remarquables travaux de Hardy qui furent publiés en 1949. Prenons la série

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^m + \dots$$

Cette série est manifestement divergente. Or, il est facile de voir que  $2S = S - 1$  donc, on peut en déduire  $S = -1$ . Génie ou ignorance ? Choisissons le génie car c'est d'Euler qu'il s'agit. Ce genre de résultat ne l'effrayait pas.

C'est assez facile à comprendre. Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Son développement de Taylor ne pose aucun problème :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + \dots$$

Ce développement divergent, pour lequel, avec  $x = 2$ , on retrouve la série précédente, donne effectivement le bon résultat avec la fonction développée..

C'est avec Hardy, ce mathématicien anglais né en 1877, et son livre « Divergent series » que les séries divergentes ont pris toute leur importance.

Donc une série n'a rien à voir avec un DA ; une série a un nombre infini de termes et elle peut être divergente et même si elle converge, elle peut ne pas converger vers la fonction développée. En revanche, un DA est un développement limité avec un nombre limité de termes. Pour parer à toute ambiguïté, si un DA est poursuivi jusqu'à un nombre infini de termes, on parlera de série asymptotique.

Prenons encore pour exemple une série asymptotique convergente bien connue,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots$$

Cette série convergente pour tout  $x$  est un DA seulement au voisinage de  $x = 0$ . C'est d'ailleurs la même chose pour la série divergente précédente. C'est le DA de la fonction  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  au voisinage de  $x = 0$  et pas ailleurs.

Pour une série convergente, se pose la question du nombre de termes à considérer pour avoir une précision donnée. La même question se pose évidemment pour un DA mais à front renversé. En effet, plus on prend de termes pour une série convergente, plus le résultat est meilleur, sous réserve que la série converge bien vers la bonne fonction. Mais pour un DA, on le voit bien avec une série divergente, le nombre de termes qu'il faut prendre pour avoir la précision optimum est limité. Le problème est qu'on ne le sait pas à l'avance et que cette précision peut être excellente (ou non) dès le premier terme. On le sent bien, même si la formulation de ce concept n'est pas précise, plus la série est divergente, moins il faudra de termes.

Prenons la fonction bien connue,

$$f(\varepsilon) = \operatorname{Erfc} \frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t^2} dt$$

On a deux développements possibles, l'un donné par une série toujours convergente,

$$\operatorname{Erfc} \frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n! \varepsilon^{2n+1}}$$

L'autre par une série asymptotique divergente,

$$\operatorname{Erfc} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n} \varepsilon^{2n} \right]$$

Prenant  $\varepsilon = \frac{1}{100}$  ce dernier développement donne le résultat avec une précision  $O(10^{-8})$  avec le seul premier terme. Sachant que  $\operatorname{Erfc} \infty = 0$ , on voit combien le premier développement converge lentement.

**Attention.**

Quand une fonction n'est pas analytique, des singularités peuvent apparaître. Plus généralement un DA ne se dérive pas sans une analyse précise. Considérons la fonction modèle

$$f(x, \varepsilon) = \sqrt{x + \varepsilon}$$

Un DA de cette fonction donne la première approximation sous la forme

$$f(x, \varepsilon) = \sqrt{x} + o(1)$$

On peut considérer que ce DA est une AUV dans le domaine  $0 \leq x \leq 1$ . Considérons alors les deux expressions de  $f(x, \varepsilon)$ , on voit que, dans le premier cas,

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+\varepsilon}}$$

fonction parfaitement définie en  $x = 0$  alors que dans le second cas, si on pose  $f_0(x) = \sqrt{x}$ , on voit que

$$\frac{df_0}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

fonction qui n'est pas bornée en  $x = 0$ .

La dérivation d'un DA ne garantit donc pas l'obtention d'un DA alors que l'intégration ne pose pas de problème. Il faut toujours penser à ces difficultés sous-jacentes lorsqu'on se heurte à des difficultés dans l'analyse asymptotique.

### 3. MDAR et MASC.

Dans ce chapitre, consacré aux fonctions singulières, on va s'intéresser à la méthode la plus utilisée, la Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés (MDAR). La MDAR contient en fait deux techniques différentes, l'une qui paraît naturelle, la technique du raccord intermédiaire dont la mise en œuvre est particulièrement délicate, l'autre plus mystérieuse, le Principe de Van Dyke (PVD), beaucoup plus facile à utiliser. Les défauts de ces deux approches seront mis en évidence à l'aide de contre-exemples. Encore une fois, il n'y a pas, sauf dans des cas simples de nature pédagogique, de théorèmes. Ces méthodes sont heuristiques et, d'une certaine façon, tant qu'elles fonctionnent, on ne se pose pas de questions, questions auxquelles on ne pourrait pas répondre. Néanmoins, en examinant les dysfonctionnements, on va pouvoir améliorer la seconde technique en suggérant un Principe Modifié de Van Dyke (PMVD). Comme au passage, on utilise la construction d'une Approximation Uniformément Valable (AUV), une nouvelle méthode sera suggérée, la Méthode des Approximations Successives Complémentaires (MASC). On pourrait d'ailleurs en modifier le nom car, le plus souvent, on n'ira pas beaucoup plus loin que le second terme ; ainsi la MAUV serait un acronyme de bon aloi (Méthode des Approximations Uniformément Valables). La MASC, dont la forme régulière est équivalente au PMVD, libère du raccord asymptotique qui n'est pas toujours facile à utiliser dans les calculs. De plus, avec l'utilisation des DA généralisés, on peut envisager le traitement de problèmes que les précédentes approches ne pourraient simplement pas traiter.

Dans un premier temps, donnons-nous les outils mathématiques minimaux permettant d'écrire les approximations de façon précise.

#### 3.1 L'opérateur d'expansion.

On considère la fonction  $\Phi(x, \varepsilon)$  définie dans un domaine  $D$ , par exemple l'intervalle  $[0,1]$ , fonction pour laquelle on a construit un DA régulier,

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \delta_0^{(i)}(\varepsilon) \Phi_0^{(i)}(x) + o(\delta_0^{(n)})$$

Eckhaus a défini une notation très commode, que l'on a déjà évoquée. On appelle « opérateur d'expansion »  $E_0^{(n)}$  l'opérateur qui permet d'écrire l'approximation asymptotique de  $\Phi$  à l'ordre  $\delta_0^{(n)}$  sous la forme,

$$E_0^{(n)} \Phi = \sum_{i=1}^n \delta_0^{(i)}(\varepsilon) \Phi_0^{(i)}(x) \quad \text{avec} \quad \Phi(x, \varepsilon) - E_0^{(n)} \Phi = o(\delta_0^{(n)})$$

Insistons encore une fois sur le fait que les opérateurs d'expansion ne concernent que les DA réguliers. A ce propos, on peut faire une remarque intéressante ; si l'on souhaite obtenir le DA de  $\Phi$  à un ordre inférieur tel que  $m < n$ , il suffit de connaître  $E_0^{(n)} \Phi$ . On a en effet,

$$E_0^{(m)} E_0^{(n)} \Phi = E_0^{(m)} \Phi + o(\delta_0^{(m)})$$

L'avantage d'utiliser des fonctions de jauge est que l'on obtient une égalité stricte,

$$E_0^{(m)} E_0^{(n)} \Phi = E_0^{(m)} \Phi$$

Cette idée se révélera féconde dans l'écriture d'un principe de raccord, les questions de non unicité étant levées.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction  $\Phi$  est singulière, par exemple à l'origine. Le DA de  $\Phi$  n'est alors valable que dans un domaine plus restreint

$$D_0: 0 < A_0 \leq x \leq 1$$

où  $A_0$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Un terme typique de cette singularité est la fonction  $\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$  qui vaut zéro pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  en dehors de l'origine et qui est égale à 1 en  $x = 0$ . On utilise le terme de développement extérieur pour qualifier le développement précédent valable dans le domaine extérieur  $D_0$ .

La variable  $x$  est aussi assez souvent appelée variable extérieure.

C'est naturellement pour faciliter la présentation que l'on se limite au cas unidimensionnel et à une singularité au voisinage de l'origine. Il faut bien comprendre que les problèmes posés par la physique sont bien entendus beaucoup plus complexes, mais que les difficultés posées par des fonctions singulières restent en revanche les mêmes que celles posées par le cas unidimensionnel étudié.

### 3.2 Un exercice préliminaire.

Considérons la fonction modèle suivante,

$$\Phi(x, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{1-4\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} x\right)$$

En supposant  $x > 0$ , on obtient sans difficulté le DA cherché ; en se limitant à deux termes, on a,

$$\Phi(x, \varepsilon) = E_0^{(2)} \Phi + o(\varepsilon) \text{ avec, } E_0^{(2)} \Phi = e^{-x} + \varepsilon e^{-x} (2 - x)$$

Lorsque l'on a construit ce développement à deux termes, on a supposé  $x > 0$ .

Le processus limite extérieur utilisé est symbolisé par «  $x$  fixé,  $\varepsilon \rightarrow 0$  »

La perturbation singulière est confirmée par le fait que  $\Phi(0, \varepsilon) = 0$  alors que, la première approximation du développement extérieur,  $E_0^{(1)} \Phi = e^{-x}$ , prend la valeur 1 à l'origine.

Le fait d'avoir négligé un terme du type  $\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$  montre la présence d'une couche limite au voisinage de l'origine que l'on lève manifestement en introduisant un processus limite dit intérieur à l'aide de la variable de couche limite ou variable intérieure,

$$X = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Du coup, au voisinage de l'origine, en introduisant ce nouveau processus «  $X$  fixé,  $\varepsilon \rightarrow 0$  » avec la fonction  $\Phi^*(X, \varepsilon) \equiv \Phi(\varepsilon X, \varepsilon)$ , on obtient un résultat totalement différent,

$$\Phi(x, \varepsilon) = E_1^{(2)}\Phi + o(\varepsilon) \text{ avec, } E_1^{(2)}\Phi = (1 - e^{-x}) + \varepsilon[(2 - X) - (2 + X)e^{-x}]$$

Il est clair que ces deux approximations, l'une valable en dehors de l'origine, l'autre dans son voisinage, doivent être reliées d'une certaine façon. C'est cela le raccord asymptotique.

La première idée est de prolonger le DA extérieur au voisinage de l'origine et de l'identifier au prolongement du DA intérieur vers l'extérieur. Cette manière de faire a eu beaucoup de succès parce qu'elle paraît naturelle, c'est la technique du raccord intermédiaire basée sur l'hypothèse d'un nécessaire recouvrement. Nous en dirons un mot un peu plus loin dans le cas général. Mais déjà, en se donnant la variable intermédiaire sous la forme  $x_\delta = \frac{x}{\delta}$  sachant que  $\varepsilon < \delta < 1$ , on peut trouver les DA à l'ordre  $\varepsilon$ ,

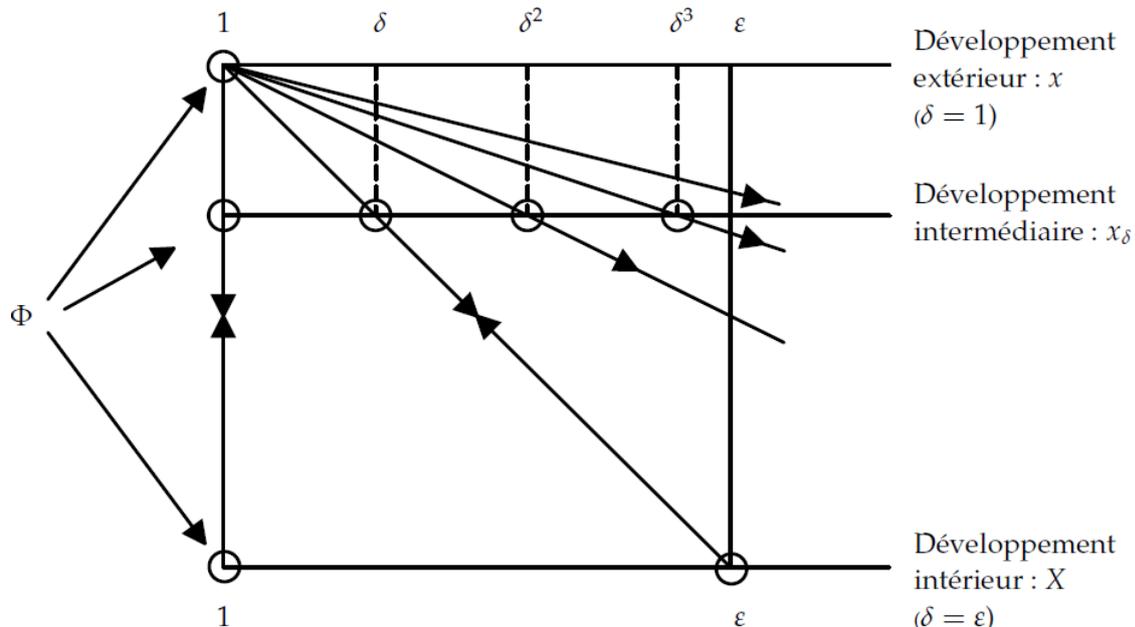
$$E_\delta E_0^{(2)}\Phi = 1 - \delta x_\delta + 2\varepsilon + O(\delta^2) + o(\varepsilon)$$

$$E_\delta \Phi = 1 - \delta x_\delta + 2\varepsilon + O(\delta^2) + o(\varepsilon)$$

$$E_\delta E_1^{(2)}\Phi = 1 - \delta x_\delta + 2\varepsilon + O(\varepsilon^n) \quad \forall n > 1$$

Il n'y a pas d'indication du nombre de termes pour l'opérateur d'expansion  $E_\delta$  car, tout dépend de la valeur de  $\delta$ .

Sur cet exemple, la figure ci-dessous montre comment les divers termes évoluent lorsque l'on se rapproche de l'origine. Elle donne une bonne idée du raccord intermédiaire et de ses difficultés dans ce cas pourtant simple.



Or, qu'observe-t-on sur ces développements ?

$$\text{Si } \sqrt{\varepsilon} \ll \delta \quad E_\delta \Phi = E_\delta E_0^{(2)}\Phi \neq E_\delta E_1^{(2)}\Phi$$

$$\text{Si } \delta < \sqrt{\varepsilon} \quad E_\delta \Phi = E_\delta E_0^{(2)}\Phi = E_\delta E_1^{(2)}\Phi = 1 - \delta x_\delta + 2\varepsilon$$

Donc, même sur cet exemple simple, même très simple, la mise en œuvre de ce raccord intermédiaire est fastidieuse et ne marche pas aussi bien qu'on aurait pu l'espérer. Contentons-nous pour l'instant d'observer ce fait mystérieux que, si l'on pousse les deux développements jusqu'au bout, le DA extérieur jusqu'à l'intérieur et le DA intérieur jusqu'à l'extérieur, on a l'égalité,

$$1 + \varepsilon(2 - X) = E_1^{(2)} E_0^{(2)} \Phi \equiv E_0^{(2)} E_1^{(2)} \Phi = 1 - x + 2\varepsilon$$

Là encore, on a utilisé les fonctions de jauge 1 et  $\varepsilon$ , sinon il aurait fallu remplacer le signe  $\equiv$  par le signe  $\cong$  et signaler que l'on s'arrête à l'ordre  $\varepsilon$ .

### 3.3 Approximation significative.

Le développement extérieur n'est donc une approximation de  $\Phi$  qu'en dehors de l'origine. Pour étudier le voisinage de l'origine, on introduit les variables locales, juste comme on l'a fait précédemment, sous la forme,

$$x_\nu = \frac{x}{\delta_\nu(\varepsilon)}$$

où  $\delta_\nu(\varepsilon) = o(1)$  est une suite asymptotique où pour deux valeurs de  $\nu$  telles que,

$$0 < \nu_1 < \nu_2 \implies \delta_{\nu_2} < \delta_{\nu_1}.$$

Ainsi, plus  $\nu$  est grand, plus la variable locale est proche de l'origine. On définit aussi les domaines asymptotiques,

$$D_\nu : A_\nu \leq x_\nu \leq B_\nu$$

où les  $A_\nu$  et  $B_\nu$  sont des constantes positives indépendantes de  $\varepsilon$ .

Ainsi, on peut en principe construire pour chaque valeur de  $\nu$  un DA régulier,

$$\Phi(x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n_\nu} \delta_\nu^{(i)}(\varepsilon) \Phi_\nu^{(i)}(x_\nu) + o(\delta_\nu^{(n_\nu)})$$

En adoptant la définition des opérateurs d'expansion, la notation devient plus simple. On a en effet,

$$E_\nu^{(n_\nu)} \Phi = \sum_{i=1}^{n_\nu} \delta_\nu^{(i)}(\varepsilon) \Phi_\nu^{(i)}(x_\nu)$$

$$\Phi(x, \varepsilon) - E_\nu^{(n_\nu)} \Phi = o(\delta_\nu^{(n_\nu)})$$

On va encore simplifier davantage en indiquant *a priori* l'ordre  $\delta$  auquel on veut obtenir l'approximation. On dit alors que l'opérateur d'expansion de  $\Phi$  est une approximation de  $\Phi$  à l'ordre  $\delta$ . Mais alors, nul besoin de préciser le nombre de termes utilisés pour obtenir ce développement régulier dans  $D_\nu$  ; il suffit d'écrire,

$$\Phi - E_\nu \Phi = o(\delta)$$

Cette notation étant admise, il n'est sûrement pas nécessaire d'utiliser toutes les variables locales possibles. Remarquons déjà que **pour une fonction régulière**, on a toujours

$$E_\nu E_0 \Phi = E_\nu \Phi.$$

On dit que  $E_0 \Phi$  contient  $E_\nu \Phi$  quelque soit  $\nu$ .

D'une façon plus générale, on dira qu'une approximation  $E_\mu \Phi$  en contient une autre  $E_\nu \Phi$  si l'on a

$$E_\nu E_\mu \Phi = E_\nu \Phi.$$

Pour une fonction singulière, certaines valeurs de  $\nu$  doivent être plus significatives que d'autres. Supposons qu'une valeur de  $\nu$  nous apparaisse plus significative que les autres, disons par exemple  $\nu = 1$ . La seule chose que l'on sache **pour une fonction singulière**, c'est que,

$$E_1 \Phi \text{ n'est pas contenu dans } E_0 \Phi.$$

On aurait bien envie d'écrire que pour certaines valeurs de  $\nu$ , on a bien  $E_\nu E_0 \Phi = E_\nu \Phi$ , et que pour d'autres, on a  $E_\nu E_1 \Phi = E_\nu \Phi$  et qu'en plus, des valeurs communes pourraient permettre d'écrire  $E_\nu E_0 \Phi = E_\nu E_1 \Phi$  qui serait la relation raccordant les deux développements. Malheureusement, bien que ce résultat soit parfois obtenu, il n'est pas assez général comme on l'a déjà vu et comme le montreront les contre-exemples qui vont suivre et qui vont modifier notre approche.

Pour simplifier la forme sans modifier les difficultés fondamentales du raccord asymptotique, nous allons faire l'hypothèse qu'il n'y a qu'une variable de cette nature. Quand il y en a plusieurs, comme le montre l'exemple ci-dessous, il faut étudier le problème couche par couche. On suppose donc que l'on a un développement significatif dit, développement intérieur, et une variable intérieure significative dite de couche limite.

Une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'une approximation  $E_1 \Phi$  soit significative est qu'elle ne soit contenue dans aucune autre approximation régulière au même ordre.

Les liens qui doivent exister entre ces divers développements réguliers sont les règles ou principes heuristiques qui définissent le raccord asymptotique.

Ce qui a probablement compliqué l'analyse de ce difficile problème, c'est un théorème dû à Kaplun, théorème dit d'extension, qui dit que, étant donné une approximation  $E_\mu \Phi$  de  $\Phi$ , il existe des valeurs de  $\nu$ , suffisamment proches de  $\mu$  pour que l'égalité  $E_\nu E_\mu \Phi = E_\nu \Phi$  ait lieu dans les domaines correspondants. C'est évidemment très séduisant mais, cela ne marche pas toujours, en particulier en présence de logarithmes.

### 3.4 Quelques exemples.

#### 3.4.1 Exemple simple de multicouche.

Pour commencer, prenons un cas simple où il y a trois variables significatives intérieures,

$$\Phi(x, \varepsilon) = 1 + x + a_1 e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + a_2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + a_3 e^{-\frac{x}{\varepsilon^2}}$$

On a manifestement trois variables intérieures, de plus en plus proches de l'origine,

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \quad x_2 = \frac{x}{\varepsilon} \quad x_3 = \frac{x}{\varepsilon^2}$$

En première approximation, on obtient facilement, avec le développement extérieur donné par

$$E_0^{(1)}\Phi = 1 + x, \text{ les trois développements à l'ordre 1 ;}$$

$$E_1^{(1)}\Phi = 1 + a_1 e^{-x_1}, \quad E_2^{(1)}\Phi = 1 + a_1 + e^{-x_2}, \quad E_3^{(1)}\Phi = 1 + a_1 + a_2 + a_3 e^{-x_3}$$

### 3.4.2 Exemple simple d'une seule couche.

Réduisons le modèle précédent à une seule couche et approfondissons-le. On a,

$$\Phi(x, \varepsilon) = 1 + x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Il est habituel de choisir (mais réducteur) de choisir les échelles intérieures en posant,

$$\delta_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^\nu$$

A l'ordre 1, on obtient,

$$E_0\Phi = 1 + x \quad \text{pour } \nu = 0$$

$$E_\nu\Phi = 1 \quad \text{pour } 0 < \nu < 1$$

$$E_1\Phi = 1 + e^{-x_1} \quad \text{pour } \nu = 1$$

On voit bien que tant que  $\mu < 1$ , on a,

$$1 = E_\mu E_0\Phi = E_\mu\Phi = 1$$

Ainsi,  $E_0\Phi$  contient  $E_\mu\Phi$  et le domaine de validité de  $E_0\Phi$  est étendu.

De même, on voit que, toujours pour  $\mu < 1$ , on a,

$$1 = E_\mu E_1\Phi = E_\mu\Phi = 1$$

Ainsi,  $E_1\Phi$  contient  $E_\mu\Phi$  et le domaine de validité de  $E_1\Phi$  est étendu.

Cette observation montre que, non seulement le théorème d'extension s'applique, mais plus encore,

$$\forall 0 < \nu < 1, E_\nu E_0\Phi = E_\nu E_1\Phi = 1,$$

et le raccord intermédiaire entre les deux développements significatifs, extérieur et intérieur a lieu.

Hélas, ce serait trop simple.

### 3.4.3 Exemple avec un logarithme.

Les logarithmes ont une propriété contrariante pour qui fait de l'analyse asymptotique. En effet, quelque soit  $m$ ,  $\ln \varepsilon^m = m \ln \varepsilon$ .

Prenons la fonction,

$$\Phi(x, \varepsilon) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln \varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

A l'ordre  $-\frac{1}{\ln \varepsilon}$ , on a,

$$E_0 \Phi = \frac{1}{\ln x} \quad \text{pour } \nu = 0$$

$$E_\nu \Phi = \frac{1}{\nu \ln \varepsilon} \quad \text{pour } 0 < \nu < 1$$

$$E_1 \Phi = \frac{1+e^{-x_1}}{\ln \varepsilon} \quad \text{pour } \nu = 1$$

Si le développement intérieur contient le développement intermédiaire tant que  $\nu < 1$ , il n'en est plus de même pour le développement extérieur, en effet,

$$E_\nu E_1 \Phi = \frac{1}{\ln \varepsilon} \neq \frac{1}{\nu \ln \varepsilon} = E_\nu \Phi$$

Si le développement intérieur n'est pas prolongeable pour  $\nu < 1$ , le théorème d'extension serait-il faux ? Evidemment non. Il s'agit bien d'un bon théorème, mais les échelles d'extension choisies ( $\delta_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^\nu$ ) ne sont pas assez denses dans l'espace des fonctions de jauge.

Ceci montre qu'un théorème prometteur comme le théorème d'extension n'est pas forcément utilisable en pratique. Mais le pire, c'est qu'il n'y a pas de raccord intermédiaire possible ; il n'existe aucune valeur de  $\nu$  dans l'intervalle  $0 < \nu < 1$  ; on a toujours,

$$E_\nu E_0 \Phi \neq E_\nu E_1 \Phi.$$

Mais, observons pour l'instant le petit miracle,

$$E_1 E_0 \Phi = E_0 E_1 \Phi = \frac{1}{\ln \varepsilon}$$

A titre d'exercice, on peut montrer qu'avec l'échelle,

$$\delta_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^\nu \ln \varepsilon$$

Le théorème d'extension est bien vérifié.

### 3.5 Le principe du raccord asymptotique.

Donc, abandonnons la technique du raccord intermédiaire, pourtant naturelle, mais pour laquelle un exemple simple montre la mise en échec, pour nous tourner vers le principe du raccord dont il semble que, assez mystérieusement, il fonctionne mieux et de façon beaucoup plus systématique.

#### 3.5.1 Le Principe de Van Dyke (PVD).

La forme la plus ancienne du principe de raccordement fut énoncée en 1964 par Van Dyke [4]. Il eut énormément de succès car il fonctionne très souvent et son application ne présente aucune difficulté. Quant à son énoncé, il est évidemment facile à retenir,

$$nm = mn.$$

Précisons tout de même un peu. Etant donné n termes du développement extérieur et m termes du développement intérieur, on a,

$$E_1^{(m)} E_0^{(n)} \Phi = E_0^{(n)} E_1^{(m)} \Phi$$

Ce PVD, utilise des DA réguliers et l'ordre d'approximation de chacun des développements n'est pas précisé. Il ne fait même pas allusion à l'utilisation ou non de fonctions de jauge. Toujours selon Van Dyke, si le but de l'analyse asymptotique est de construire un DA, donc généralisé, de la solution à un ordre donné, on a,

$$\phi_{ap} = E_0^{(n)} \Phi + E_1^{(m)} \Phi - E_1^{(m)} E_0^{(n)} \Phi$$

Si l'on reprend l'exemple de l'exercice préliminaire, rappelons que, à l'ordre  $\varepsilon$ , en utilisant les fonctions de jauge 1 et  $\varepsilon$ , on a,

$$E_0^{(2)} \Phi = e^{-x} + \varepsilon e^{-x} (2 - x) \text{ et, } E_1^{(2)} \Phi = (1 - e^{-X}) + \varepsilon [(2 - X) - (2 + X)e^{-X}]$$

Le PVD fonctionne alors dans toutes les configurations,

$$E_1^{(1)} E_0^{(1)} \Phi = E_0^{(1)} E_1^{(1)} \Phi = 1$$

$$\phi_{ap} = e^{-x} - e^{-X}$$

Cette approximation est correcte à l'ordre 1. Les deux suivantes n'améliorent pas ce résultat ; les deux termes de l'ordre  $\varepsilon$  sont superflus.

Ainsi, pour deux termes du DA extérieur et un terme du DA intérieur, on a,

$$E_1^{(1)} E_0^{(2)} \Phi = E_0^{(2)} E_1^{(1)} \Phi = 1$$

$$\phi_{ap} = e^{-x} - e^{-X} + \varepsilon e^{-x} (2 - x)$$

Pour un terme du DA extérieur et deux termes du DA intérieur, on a,

$$E_1^{(2)} E_0^{(1)} \Phi = E_0^{(1)} E_1^{(2)} \Phi = 1 - \varepsilon X$$

$$\phi_{ap} = e^{-x} - e^{-X} + \varepsilon[2 - (2 + X)e^{-X}]$$

En revanche, la dernière approximation, avec deux termes pour les deux développements est valable à l'ordre  $\varepsilon$  ;

$$E_1^{(2)} E_0^{(2)} \Phi = E_0^{(2)} E_1^{(2)} \Phi = 1 + \varepsilon(2 - X)$$

$$\phi_{ap} = e^{-x} - e^{-X} + \varepsilon[(2 - x)e^{-x} - (2 + X)e^{-X}]$$

Cet exemple montre que, d'une part, seul l'ordre auquel on s'arrête est important, d'autre part que si la précision des deux DA n'est pas la même, alors, il est clair que la précision de l'approximation uniforme est celle de la moins bonne précision.

### 3.5.2 Le Principe Modifié de Van Dyke (PMVD).

A l'image d'une chaîne haute fidélité dont tous les éléments doivent être aussi performants, faisons en sorte que chaque élément de l'approximation uniforme soit calculé avec la même précision. Du coup, il n'est pas nécessaire de préciser le nombre de termes d'un DA, seule la précision importe.

D'où le principe modifié qu'en hommage à Van Dyke, on appelle le PMVD et qu'on peut énoncer ainsi : si  $E_0\Phi$  et  $E_1\Phi$  sont les DA respectivement extérieur et intérieur de  $\Phi$ , à un ordre donné  $\delta$ , définis selon une suite asymptotique de fonctions de jauge, on a,

$$E_1 E_0 \Phi = E_0 E_1 \Phi$$

Par ailleurs, dans le cas d'une seule couche limite,  $\phi_{ap}$  une Approximation Uniformément Valable (AUV) dans  $D$  doit être obtenue, au même ordre, par le développement composite,

$$\phi_{ap} = E_0 \Phi + E_1 \Phi - E_1 E_0 \Phi$$

Il est assez étonnant que ce dernier principe, certainement un des plus efficaces connus, ne soit apparu que tard et qu'il soit peu utilisé. Cela tient au fait que la recherche de ces développements est hiérarchisée, et que ayant d'abord trouvé  $E_0\Phi$ , l'ordre de grandeur recherché de  $E_1\Phi$  n'était pas forcément celui de  $E_0\Phi$ . Tel fut le cas du premier exemple important, celui de la couche limite de Prandtl. Ensuite les AUV faisaient peu partie des objectifs dans l'analyse de couche limite, d'abord parce que l'on était bien content d'avoir une analyse « simple » de la couche limite et qu'ensuite, l'AUV ne correspondait presque jamais à la notion de DA régulier bien ancrée dans les idées.

Reprenons l'exemple précédant,

$$\Phi(x, \varepsilon) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln \varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Si l'on s'arrête à l'ordre  $\left(\frac{1}{(\ln \varepsilon)^2}\right)$ , avec la suite  $1, -\frac{1}{\ln \varepsilon}, \frac{1}{(\ln \varepsilon)^2}$ , on a,

$$E_0\Phi = \frac{1}{\ln x} \quad \text{pour } \nu = 0$$

$$E_1\Phi = \frac{1+e^{-x_1}}{\ln \varepsilon} - \frac{\ln x_1}{(\ln \varepsilon)^2} \quad \text{pour } \nu = 1$$

Manifestement, le PVD ne fonctionne pas pour  $n = 1$  et  $m = 2$ ,

$$\frac{1}{\ln \varepsilon} - \frac{\ln x_1}{(\ln \varepsilon)^2} = E_1^{(2)} E_0^{(1)} \Phi \neq E_0^{(1)} E_1^{(2)} \Phi = \frac{2}{\ln \varepsilon}$$

En revanche, le PMVD ne pose pas de problème,

$$\frac{1}{\ln \varepsilon} - \frac{\ln x_1}{(\ln \varepsilon)^2} = E_1 E_0 \Phi = E_0 E_1 \Phi = \frac{2}{\ln \varepsilon} - \frac{\ln x}{(\ln \varepsilon)^2}$$

De fait, mais il s'agit d'un exemple pédagogique, on a ici  $\phi_{ap} = \Phi$ .

Cet exemple montre, on peut le vérifier, que le développement extérieur contient le développement intermédiaire mais que ce n'est pas le cas du développement intérieur. Il n'y a donc pas de zone de recouvrement pourtant exigée dans la technique du raccord intermédiaire.

### 3.5.3 Réflexions sur le raccord asymptotique.

Il semble donc que le PMVD lève des contre-exemples au PVD. Examinons cependant l'exemple suivant,

$$\Phi(x, \varepsilon) = 1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon \ln \frac{x}{\varepsilon}$$

Nous sommes toujours sur l'intervalle  $0 < x < 1$ . A l'ordre  $\varepsilon$ , on voit que,

$$E_0\Phi = 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \ln x$$

$$E_1\Phi = 1 + e^{-x_1} + \varepsilon \ln x_1$$

Ainsi, à l'ordre  $O(-\varepsilon \ln \varepsilon)$ , il n'y a pas de raccord,

$$1 - \varepsilon \ln \varepsilon = E_1 E_0 \Phi \neq E_0 E_1 \Phi = 1$$

et donc, il n'apparaît pas possible à cet ordre de construire une AUV.

La remarque essentielle qu'il faut retenir, c'est que le PMVD lève les contre-exemples probablement parce qu'il exige *a priori* l'existence d'une AUV.

De plus, le PMVD s'applique alors que la règle du raccord intermédiaire est en défaut contrairement à une idée reçue qui date de longtemps.

Citons à ce propos Van Dyke

**“Fortunately, since the two expansions have a common region of validity, it is easy to construct from them a single uniformly valid expansion “**

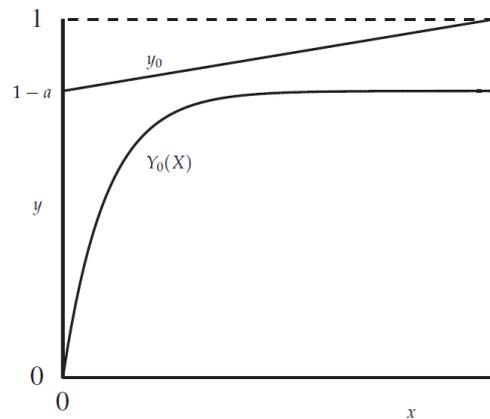
Nous pensons que c'est exactement l'inverse qu'il faut dire, c'est parce que l'on peut construire une AUV que le raccord peut se faire, et encore, pas n'importe lequel, le PMVD.

Mais, dans cette réflexion, il y a plus. Comme les applications en vue relèvent de la physique, le petit paramètre générique envisagé  $\varepsilon$  n'est pas en pratique aussi petit que ne l'exigerait le formalisme mathématique. La notion même de recouvrement devient alors illusoire y compris pour l'exemple le plus simple, celui du modèle de Friedrichs. A l'ordre 1, avec  $X = \frac{x}{\varepsilon}$  on a,

$$E_0 y = y_0(x) = ax + 1 - a$$

$$E_1 y = Y_0(X) = (1 - a)(1 - e^{-X})$$

Si l'on trace  $y_0(x)$  et  $Y_0(X)$ , on voit visuellement sur la figure qui suit qu'il n'y a pas de recouvrement car en effet, le recouvrement est une notion mathématique valable seulement lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



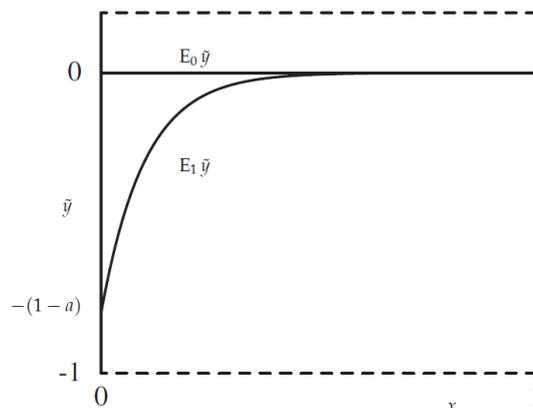
Une remarque importante, en fait à l'origine de méthodes plus efficaces (méthode déficitaire, couche limite corrective, MAUV), peut être faite sur ce simple modèle. Posons,

$$\tilde{y} = y - y_0$$

Toujours à l'ordre 1, on a  $E_0 \tilde{y} = 0$  et  $E_1 \tilde{y} = E_1(y - E_0 y)$ , soit finalement,

$$E_1 \tilde{y} = -(1 - a)e^{-X}$$

Si l'on regarde la figure ci-dessous, on voit que la notion de recouvrement prend du sens.



Sur cette figure, on a tracé  $E_0\tilde{y}$  qui est nul et  $E_1\tilde{y}$  qui est en fait, à l'ordre 1, une AUV de  $\tilde{y}$ ,

$$\tilde{y} = E_1\tilde{y} + o(1)$$

### 3.6 La Méthode des Approximations successives complémentaires.

Comme on vient de le signaler, la vision du raccord asymptotique doit s'inverser et donc peut-être disparaître : on doit d'abord supposer la structure d'une AUV et en déduire la méthode permettant de la construire. Quelques méthodes existent déjà mais les applications sont très limitées.

La MASC est d'application beaucoup plus large et elle ne nécessite pas le raccordement entre plusieurs DA.

On cherche à représenter la fonction  $\Phi(x, \varepsilon)$  par une approximation,

$$\phi_a(x, X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i(\varepsilon) [\bar{\varphi}_i(x, \varepsilon) + \bar{\psi}_i(X, \varepsilon)]$$

Selon la vision de la MASC, cette expression est censée représenter une approximation de  $\Phi$  à l'ordre  $\bar{\delta}_n$ ,

$$\Phi = \phi_a + o(\bar{\delta}_n)$$

Comme l'habitude est trop souvent de confondre la notion de DA avec celle de DA régulier, il est préférable de préciser que l'AUV est généralisée. A partir de celle-ci, on peut construire une AUV régulière sous la forme,

$$\phi_a = \phi_{ar} + o(\delta_m)$$

où  $\phi_{ar}$  est une AUV régulière telle que  $\bar{\delta}_n = O(\delta_m)$ ,

$$\phi_{ar}(x, X, \varepsilon) = \sum_{i=1}^m \delta_i(\varepsilon) [\varphi_i(x) + \psi_i(X)]$$

La suite des fonctions d'ordre  $\bar{\delta}_i$  peut être la même que la suite  $\delta_i$ , mais cela n'est pas nécessaire et même inexact en général, le développement généralisé contenant plus d'informations que le développement régulier.

Un point important, que l'on peut observer en pratique et qui pose problème lorsque l'on utilise une méthode de raccordement, est que les fonctions, apparaissant entre crochets dans les expressions précédentes, ne sont pas nécessairement bornées alors que par hypothèse la somme est bornée.

Sous sa forme régulière, la MASC a déjà été utilisée en quelques rares occasions [7] mais, comme on l'a déjà vu à propos du PMVD dont l'utilisation paraissait pourtant naturelle, la pratique ne s'est pas développée. D'ailleurs, et ce n'est évidemment pas une coïncidence, on peut montrer [8] sous des hypothèses peu restrictives que la MASC régulière est équivalente au PMVD.

Rappelons que le PMVD qui s'écrit,

$$E_1 E_0 \Phi = E_0 E_1 \Phi$$

concerne une AUV qui s'écrit, pour une seule couche limite, sous la forme du développement composite,

$$\phi_{ap} = E_0 \Phi + E_1 \Phi - E_1 E_0 \Phi$$

La structure des opérateurs d'expansion est telle que l'on a bien un développement de type MASC régulière. Ainsi, il paraît naturel de trouver la justification du raccord asymptotique dans la forme supposée de l'AUV.

Lorsque le PMVD fonctionne bien, son utilisation est assez commode pour ne pas utiliser la MASC régulière. En revanche, la forme généralisée de la MASC est adaptée à des problèmes plus complexes comme ceux liés à des problèmes de couplage fort comme dans le cas de couches limites interactives.

Une autre remarque intéressante est que si la forme régulière est sans ambiguïté, il n'en est pas de même de la forme généralisée où l'on voit que les fonctions  $\bar{\varphi}_i(x, \varepsilon)$  et  $\bar{\psi}_i(X, \varepsilon)$  peuvent être formellement réécrites en utilisant  $x$  ou  $X$  à travers la relation  $\varepsilon X = x$ .

« Comment s'y prendre ? » est une question étroitement liée à la connaissance du problème physique et de ce que l'on souhaite étudier.

Néanmoins, on peut donner quelques indications générales. La MASC est recommandée dans deux cas :

1. Quand l'approximation locale de la solution présente une structure complexe au voisinage de la zone de non uniformité. Considérons la fonction,

$$\Phi(x, \varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{x + \varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

La MDAR montre ainsi la présence de deux épaisseurs de couche limite.

2. Quand l'ordre de grandeur de certains termes n'est pas suggéré ou imposé par des conditions aux limites ou par les équations considérées. Considérons le problème suivant,

$$L_\varepsilon[\Phi(x, \varepsilon)] = (x + \varepsilon) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d\Phi}{dx} - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \Phi|_{x=1} = 2$$

L'analyse de ce problème évoqué par Lagerstrom [2] en termes de développement régulier est très délicate. On note déjà que le problème réduit donné par

$$L_0 \varphi_1 = x \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \frac{d\varphi_1}{dx} - 1 = 0$$

est du second ordre mais qu'il y a tout de même une singularité à l'origine. La solution vérifiant la condition en  $x = 1$  est donnée par,

$$\varphi_1 = 1 + x + A_1 \ln x$$

La condition à l'origine ne pouvant être vérifiée, on cherche une AUV en écrivant,

$$\phi_a = \varphi_1(x) + \psi_1(X, \varepsilon)$$

En reportant dans l'équation originale, on obtient,

$$L_\varepsilon \phi_a = -\varepsilon \frac{A_1}{x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left[ (1+X) \frac{d^2 \psi_1}{dX^2} + \frac{d\psi_1}{dX} \right]$$

Il est clair que si les conditions aux limites sont vérifiées et si l'on peut annuler  $L_\varepsilon \phi_a$ , alors on a la solution exacte, ce qui en général n'est pas possible. Mais ici, pour ce modèle pédagogique, on le peut et on obtient,

$$A_1 = 0 \quad \text{et,} \quad (1+X) \frac{d^2 \psi_1}{dX^2} + \frac{d\psi_1}{dX} = 0$$

La solution est donnée par

$$\psi_1 = B_1 \ln(1+X) + B_2$$

et la vérification des conditions aux limites donne les constantes et la solution exacte,

$$B_1 = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad B_2 = -1$$

$$\Phi = \phi_a = x + \frac{\ln\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Il est clair que l'utilisation de DA généralisés est ici décisive.

D'une façon générale, la MASC permet de vérifier exactement les conditions aux limites mais, sauf cas très particuliers, comme le précédent,  $L_\varepsilon \phi_a$  n'est pas nul. On peut examiner la nature du reste,

$$L_\varepsilon \phi_a = R(x, X, \varepsilon)$$

Il faut donc que  $R$  soit petit, au-moins en un certain sens, comme les exemples peuvent le montrer. On pourrait donc en principe, moyennant un théorème d'estimation montrer qu'une norme  $\|\Phi - \phi_a\|$  est petite. On peut peut-être l'envisager sur des problèmes linéaires ou sur des problèmes non linéaires très particulier, mais cela reste un problème ouvert en mathématiques. Néanmoins, en pratique, la structure du reste montre que l'on a probablement une AUV mais aussi comment on peut éventuellement améliorer l'approximation. Ce point pourra être précisé quand les opérateurs eux-mêmes le seront.

Une dernière remarque pour conclure. La MASC où MAUV, sous la forme,

$$\phi_a = \varphi_1(x, \varepsilon) + \psi_1(X, \varepsilon)$$

contient toute les méthodes de type MDAR. En effet, si l'on s'intéresse à un terme tel que  $\psi_1(X, \varepsilon)$ , c'est la méthode déficitaire qui contient évidemment le PMVD. Si l'on s'intéresse à  $\phi_a$ , on pourrait penser que c'est le cadre général de la recherche d'une approximation, mais on oublierait que la solution « Eulérienne »  $\varphi_1(x, \varepsilon)$  est en fait le pivot de ce type d'analyse et qu'elle provient d'une théorie bâtie en supposant l'existence d'un petit paramètre.

## Bibliographie rapide

- [1] K.O. Friedrichs. Fluid dynamics.  
Brown University. 1942.
- [2] P.A. Lagerstrom. Matched asymptotic expansions, ideas and techniques.  
Applied mathematical sciences, 76. Springer, 1988.
- [3] J.D. Cole. Perturbation methods in applied mathematics.  
Pure and applied mathematics. Blaisdell publishing company, Waltham, MA, 1968.
- [4] M. Van Dyke. Perturbation methods in fluid mechanics.  
Academic press, New York, 1964.
- [5] W. Eckhaus. Matched asymptotic expansions and singular perturbations.  
Studies in mathematics and its applications, 9. North Holland, 1979.
- [6] W. Eckhaus. Asymptotic analysis of singular perturbations.  
North Holland, American Elsevier, New York, 1973.
- [7] R.E. O'Malley, Jr. Introduction to singular perturbations.  
Volume 14 de *Applied Mathematics and Mechanics*. Academic press, 1974.
- [8] J. Cousteix, J. Mauss. Analyse asymptotique et couche limite.  
Mathématiques & Applications, 56. SMAI, Springer, 2006.